Exemples de sujets – Epreuve de Physique, Filière PSI

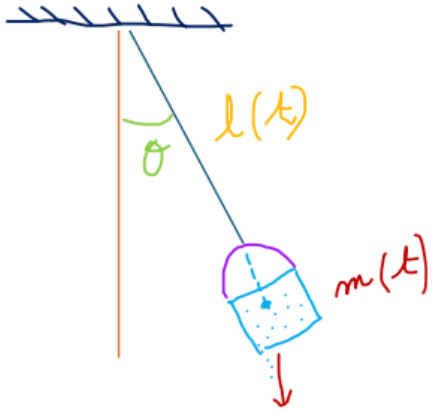
Pour faciliter la lecture, les réponses sont en bleu.

Question 1

La question est : « Un seau d'eau se balance par un fil, comme un pendule. On met le système en mouvement. Cependant le seau fuit lentement au cours du mouvement. Comment évolue la période des oscillations. »

Cette question demande de penser un modèle et ensuite d'écrire les équations : Est-ce que le fait que le seau soit percé va modifier la trajectoire d'un pendule ? Pouvons-nous décrire le pendule avec une masse oscillante variable dans le temps ? Pouvons-nous traduire ceci par une longueur de fil ou de corde dépendant du temps ? Pouvons-nous écrire un modèle pour le fluide (l'eau) au cours du temps ? Comment l'eau va-t-elle s'échapper du seau ?

Nous décrivons ici quelques initiatives (propositions) intéressantes des élèves.



Seau faisant de la balançoire

Est-ce que l'equation du fluide reste valable?

$$\Delta\left(\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gh(t)\right)=0$$

Il est d'abord utile de rappeler l'equation pour le pendule

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

En supposant une masse variable au cours du temps, il est alors possible d'introduire avec le moment cinetique une Equation. Une proposition d'un de cos camarades:

$$J\ddot{\theta}+m(t)gL\theta=0$$

question : L ? $L=l(t)$

relation avec centre de gravité ?

l(t) varie avec la masse du seau, incluant l'eau.

Voici quelques reponses de vos camarades pour la frequence d'oscillations

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{L_0\pm h(t)/2}} \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{l_0-\alpha m}}$$

Lorsque le seau se vide, alors la masse est fixe et le seau peut poursuivre sa trajectoire avec une oscillation fixe. Nous pourrions aussi imaginer un mécanisme de freinage …

Question 2 - Matériau et Physique de Hall

Nous étudions un matériau 2D fait de petites planches métalliques. Le système a N planches. Nous introduirons la longueur L_x d'une planche ainsi que sa largeur a tel que $a \ll L_x$. Nous avons ainsi la longueur totale dans la direction y, $L_y = Na$.

(a) Un champ magnétique polarisé dans la direction perpendiculaire au plan, oscillant dans la direction y, est introduit prenant la forme

$$\vec{B} = B(-1)^i \vec{e}_z.$$

i réfère ici à une planche telle que $i = 1, ..., N$. Dans ce modèle le champ magnétique est uniforme dans chaque sous-système. Quel est le flux magnétique *total* à travers ce système. Chaque surface est orientée dans la direction $\vec{e}_z$.

L'idée est d'introduire le flux magnétique dans un sous-système

$$\Phi_i = \iint \vec{B} \cdot (dxdy\vec{e}_z) = B(-1)^i L_x a$$

Le flux total est ainsi

$$\Phi_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = BL_x a \sum_{i=1}^{N} (-1)^i.$$

Si $N = 2$ le flux total est zéro. Si $N = 3$ alors le système se comporte comme une planche etc.

(b) Si nous prenons maintenant la limite où $a \to 0$ et que $N \to +\infty$ mais que $L_y = Na$ reste bien défini, nous pouvons ainsi décrire l'oscillation du champ magnétique en $y = ia$ comme

$$\vec{B} = Be^{i\pi y}\vec{e}_z = B(-1)^y \vec{e}_z.$$

Quel est le flux total induit dans le système. Comparer ce résultat avec le modèle plus haut.

Le flux total induit est

$$\Phi_{tot} = \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} B(-1)^y dy = \mathrm{Re}\left(L_x \int_0^{L_y} Be^{i\pi y} dy\right) = \mathrm{Re}\frac{L_x B}{i\pi}\left(e^{i\pi y} - 1\right) = BL_x L_y \frac{\sin(\pi L_y)}{\pi L_y}.$$

Le résultat BL_xL_y correspondrait à un champ uniforme sur toute la surface ce qui veut aussi dire la limite $\pi L_y \ll 1$. La fonction (x) a un pic central pour $x \leq 3$ pour laquelle la réponse est proche du champ uniforme. Ensuite, il y a des oscillations rapides et une décroissance en $1/L_y$. Le résultat est alors différent du cas ci-dessus car la forme du champ à l'interface entre deux planches est aussi différente. Ce modèle décrit un champ magnétique avec un vecteur d'onde proche de π dans la direction transverse. Le premier modèle est un modèle de champ magnétique en forme de créneaux (dents de scie). Le but est ainsi de décrire l'effet Hall classique avec ce flux Φ_{tot}.

(c) Nous ajoutons un champ électrique dans la direction $\vec{e}_x$, $\vec{E} = E_0\vec{e}_x$ pour chaque planche. Décrire les forces en présence sur un électron dans une planche. Nous faisons un modèle simple où à l'équilibre la force totale dans la direction x est zéro. Quelle est alors la vitesse d'un électron v_y dans la direction y à l'équilibre. Montrer alors la formule de Hall classique qui peut être vue ici comme

$$j_y = -ne\cos(\pi y)\frac{E_0}{B},$$

avec j_y la densité de courant dans la direction y.

La force totale est

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Il faut ensuite se rappeler de la trajectoire d'un électron en présence d'un champ magnétique qui tend à faire des cercles tel que $v_x^2(t) + v_y^2(t)$ est fixé. A court temps, il y alors induction d'une vitesse en v_y et qu'il faut ensuite inclure dans le bilan des forces en x pour décrire cet équilibre. A grand temps, nous supposons que les charges s'équilibrent dans le système et que $v_y(t) = v_y$. Dans la direction x, la force totale est zéro

$$0 = E_0 + v_y B(-1)^y.$$

Nous obtenons ainsi

$$v_y = -\frac{E_0}{B(-1)^y}.$$

Lorsque $B \to 0$ ce modèle n'est plus applicable et à grand B, les trajectoires des électrons se localisent au coeur du système, la taille des cercles cyclotron tend vers zéro. Nous vérifions ainsi la formule proposée

$$j_y = -nee^{-i\pi y}\frac{E_0}{B}.$$

La composante réelle de la densité de courant transverse est

$$\boxed{j_y = -ne\cos(\pi y)\frac{E_0}{B}.}$$

(d) Nous étudions la réponse de j_y intégrée sur tous les points du matériau. Nous fixons le champ magnétique pour obtenir une résonance cyclotron $L_y = \frac{v_0}{\omega_c}$ avec $\omega_c = \frac{eB}{m}$ et v_0 est fixée. Discuter la forme de la réponse obtenue.

$$\iint j_y dxdy = -\frac{neL_xE_0}{B}\int_0^{\frac{v_0}{\omega_c}} \cos(\pi y)dy = -\frac{neL_xE_0}{B\pi}\sin(\pi\frac{v_0}{\omega_c}).$$

Nous voyons de nouvelles oscillations apparaître en fonction du champ appliqué E_0. La limite de champ uniforme se retrouve à grand champ magnétique lorsque L_y est petit de l'ordre de a.

Si le temps le permet nous pourrons décrire la trajectoire d'un électron en champ électrique et magnétique à court temps et essayer de développer l'équlibre du système.

Question 3 - Corde qui tourne

Une corde inextensible de masse linéique λ et de longueur l est entrainée dans un mouvement de rotation par un axe vertical (suivant (y)) tournant à la vitesse angulaire constante ω. On cherche à étudier les oscillations de corde suivant y.

Montrer que les fréquences d'oscillations (des petits mouvements de la corde suivant y) sont quantifiées.

Indication: On pourra étudier un développement en série entière des solutions stationnaires de l'équation obtenue pour des petites oscillations suivant (y) de la corde, écrite avec des variables adimensionnées.

Introduction : Les élèves prennent le soin de rappeler l'équation de la corde vibrante et ensuite la généralisent à cette situation pour obtenir :

$$\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 \frac{\partial}{\partial x}[(l^2 - x^2)\frac{\partial y}{\partial x}].$$

La difficulté est la présence d'une force centrifuge.

Il faut ensuite suivre l'indication et proposer une réponse.

On cherche des petits mouvements d'oscillations de la corde, disons à la pulsation Ω, donc une solution sous la forme: $y(x,t) = \cos(\Omega t) f(x)$, ce qui donne l'équation différentielle pour $f(x)$ à partir de (1). On va alors suivre l'énoncé et se placer en variable adimensionnée, ce qui ne peut être que $\xi = x/L$. L'équation devient:

$$2\frac{\Omega^2}{\omega^2} f - 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + (1 - \xi^2)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0. \tag{2}$$

$$f(\xi) = \sum_{n \geq 0} c_n \xi^n$$

Avec $f(0) = 0$ donc $c_0 = 0$. Et surtout, la fonction $f(\xi)$ ne doit pas diverger lorsque ξ tend vers 1, soit quand x tend vers l, c'est-à-dire que le bout de la corde garde un petit mouvement d'oscillation comme le reste de la corde. (2) se transforme en une relation de récurrence sur la suite c_n $(n \geq 1)$. On a:

$$c_{n+2} = -\frac{2\frac{\Omega^2}{\omega^2} - n - n^2}{(n+2)(n+1)} c_n. \tag{3}$$

Regardons la relation de récurrence (3) pour $n >> 1$, elle devient donc (avec n impair):

$$c_{n+2} \sim c_n. \tag{4}$$

Mais cela veut dire qu'à partir d'un certain rang $N >> 1$, on a une série de la forme:

$$c_N \xi^N (1 + \xi^2 + \xi^4 + ...). \tag{5}$$

Cette série diverge lorsque $\xi \to 1$. Donc, nous avons un problème. La seule manière de s'en sortir est de dire que l'on ne peut pas faire l'approximation $n >> 1$ dans (3). Donc, il

doit exister une valeur de n (impair) telle que pour cette valeur n_0, $c_{n_0} = 0$. Alors (3) se transformerait en la relation $0 = 0$ pour les $n \geq n_0$, ce qui convient. On en déduit qu'il doit exister n_0 tel que:

$$2\frac{\Omega^2}{\omega^2} - n_0 - n_0^2 = 0. \tag{6}$$

Et ceci afin qu'il existe des pulsations Ω possibles pour obtenir des petits mouvements d'oscillations suivant (y) de la corde. Cela veut dire que $\Omega = \Omega_{n_0}$.

On conclut que pour chaque entier n, la pulsation $\Omega_n^2 = \omega^2 n(n+1)/2$ convient et donc les fréquences d'oscillations sont quantifiées.