Exemple d'exercices - Epreuve de Mathématiques, Filière PSI

Exercice 1 Déterminer quelles sont les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $\mathbb{R}$ telles que

$$A^7 + 2A^6 + 4A^5 + 4A^4 + 4A^3 + 2A^2 + A = 0$$

.

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id})^2 \oplus \mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{Id})^2 = \mathbb{C}^n.$$

Exprimer, si c'est possible, le projecteur sur $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{Id})^2$ comme un polynôme en A.

'**Exercice 3** On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels, de taille $n \times n$. Pour A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on définit l'endomorphisme ϕ_A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par

$$\phi_A : X \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow AXA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Exprimer le déterminant de ϕ_A en fonction de celui de A.