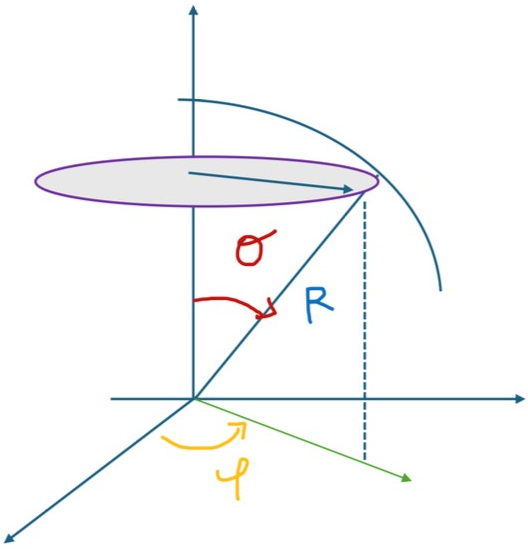
Exemples de sujets – Epreuve de Physique, Filière PC

Les réponses sont en bleu.

Question 1

Dans cette question d'électromagnétisme, nous avons pour but de généraliser la formule d'Ampère entre moment magnétique et courant dans une boucle, pour une situation sphérique dans le cadre de champs magnétiques appliqués. Nous commençons avec la boucle de courant sur la surface d'une sphère et essayons ensuite de dériver la formule pour une sphère entière qui peut être vue comme un ensemble de boucles avec un rayon variable.



En guise d'introduction :

Soit une particule de masse m et charge q faisant une boucle de courant en coordonnées sphériques (R, θ, φ). Quel est le lien entre le courant I et la vitesse v de la particule le long de cette boucle.

Soit r le rayon de la boucle. Il est utile de prendre le temps de représenter ce rayon en fonction des coordonnées sphériques. Nous avons $r = R \sin\theta$ où R est le rayon de la sphère. Le courant I est donc introduit comme

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q\,v}{2\pi r}$$

T est le temps pour faire un tour. La vitesse est introduite dans la direction du courant qui est fixée par le signe de la charge.

1) Ecrire le moment magnétique $\vec{\mu}$ induit dans la direction verticale z en fonction du rayon R de la sphère et de l'angle θ.

2) Ecrire l'équilibre des forces en présence d'un champ magnétique $\vec{M}$ dans la direction z. En déduire la vitesse v en fonction du champ magnétique.

3) En déduire la forme du moment magnétique total en supposant que pour chaque angle polaire θ la description ci-dessus reste valable.

Il est utile de pratiquer certains passages entre coordonnées cartésiennes et sphériques, en présence de formulaires. Il est utile de pratiquer les relations simples entre ces différents repères, incluant aussi le système cylindrique. Le but du jeu est d'écrire l'équilibre dû à la force de Lorentz dans les différentes situations dans une géométrie circulaire (le poids est équilibré avec la réaction de la boucle de courant dans la direction z). Nous cachons cette étape et les étudiants sont invités à formuler leurs réponses.

Nous avons la relation avec le moment cinétique angulaire

$$\mu_z = \frac{q}{2m} L_z.$$

$$\boxed{\vec{\mu}(\theta) = \frac{M}{2} \frac{q^2 R^2 \sin^2\theta}{m} \vec{e}_z.}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)).$$

$$\mu_{tot} = \int_0^{\pi} \vec{\mu}(\theta) R d\theta = M \frac{\pi}{4} \frac{q^2 R^3}{m} \vec{e}_z.$$

---

4) Refaire l'analyse avec un champ magnétique radial $\vec{B} = B\vec{e}_R$ où $\vec{e}_R$ est le vecteur unitaire dans la direction radiale avec

$$B = B(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{R^2}.$$

En déduire comment mesurer la charge magnétique du monopole q_m à travers le moment magnétique induit.

$$\vec{\mu}_{tot} = \int_0^{\pi} \vec{\mu}(\theta) R\, d\theta = B(R)\frac{R^3}{2m} q^2 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta .$$

Si les étudiant(e)s ne parviennent pas à faire cette intégrale, nous pouvons les aider

$$\frac{d}{d\theta}\sin^3\theta = 3\sin^2\theta\cos\theta .$$

$$\vec{\mu}_{tot} = B(R)\frac{R^3}{6m} q^2 [\sin^3\theta]_0^{\pi} = 0.$$

Nous observons en effet que la force de Lorentz change de direction en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et donc aussi la direction du courant dans les boucles. Pour mesurer la charge magnétique q_m du monopole qui est associée à la divergence du champ magnétique au coeur de la sphère nous pouvons ainsi proposer d'intégrer sur une demi sphère tel que

$$\boxed{\mu_{tot} = B(R)\frac{R^3}{6m} q^2 [\sin^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = B(R)\frac{R^3}{6m} q^2 = R\frac{\mu_0 q_m q^2}{24\pi m}}$$

Il fallait justifier pourquoi zéro est un résultat acceptable avec une image physique.

Si un ou une étudiante a bien répondu nous formulons une question additionnelle sur l'application du théorème de Gauss.

Question 2

Nous questionnons ici sur le moment dipolaire électrique permanent de l'eau à travers des étapes. Cette question porte sur l'électromagnetisme, la mécanique, le travail et l'énergie en effleurant l'aspect de chimie.

L'idée est de bien rentrer dans la question et de rappeler le théorème de Gauss. Lors du mouvement du proton il y a équilibre entre champ électrique appliqué et champ électrique dû au nuage électronique. En appliquant le théorème de Gauss centré (produit) par la charge $-q$ sur le proton nous obtenons

$$E_e(4\pi d^2) = \rho \frac{4}{3}\pi d^3.$$

$$\rho = \frac{-q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

Nous prenons en compte le fait qu'en l'absence du champ $\vec{E}$ la fonction d'onde électronique est distribuée de manière uniforme dans un volume associé au rayon de Bohr a.

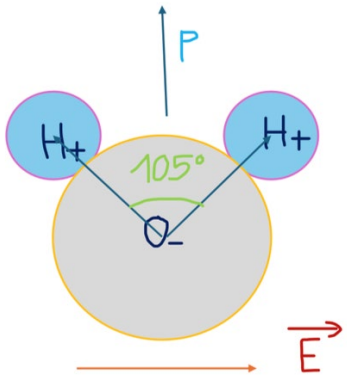
$$E_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{a^3}$$

$$E + E_e = 0.$$

Introduction : Rappeler le mécanisme de polarisabilité atomique en présence d'un champ électrique et justifier pourquoi la polarisabilité d'un atome α ou moment dipolaire $p = qd$ est

$$p = \alpha E = (4\pi\epsilon_0 a^3)E.$$

a est le rayon de l'atome et d la distance entre le proton et la charge effective $-q$ correspondant au centre du nuage électronique en présence du champ $\vec{E}$.



1) Le moment dipolaire de l'eau permanent est très grand de l'ordre de 6.1×10^{-30} C.m. Justifier le résultat avec la figure.

Il est aussi utile de s'interroger sur l'ordre de grandeur et de proposer une réponse.

Nous allons ensuite étudier l'effet du champ électrique induisant une rotation et un travail mécanique. L'idée est de proposer un modèle réaliste à travers un sens physique et des formules. Le premier enjeu est de comprendre pourquoi il y a rotation du système.

Il y a deux dipoles dans l'analyse formés du nuage électronique O^- avec chacun des protons dans l'hydron H_+. Ces deux moments dipolaires sont ainsi décrits par deux vecteurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$. La somme de ces deux vecteurs est suivant l'axe vertical dans le cas présent, mais nous avons l'invariance par rotation du modèle dans toutes les directions. Ceci justifie le moment dipolaire électrique

$$\boxed{\vec{p} = q(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) = |\vec{p}|\vec{e}_z.}$$

2) Décrire de manière quantitative ce qui se passe lorsque nous appliquons un champ électrique parallèle à l'axe horizontal en introduisant le *couple* de force (torque) associé. Montrer que le travail produit une énergie équivalente au dipole

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Prenons un de ces dipoles. La force sur la charge positive en haut à droite i.e. sur H_+ est $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ et la force sur le nuage électronique en bas à gauche, distant de la distance d, est $\vec{F}_- = -q\vec{E}$. Il y alors un couple

$$\vec{N}_1 = \left(\vec{r}_+ \times \vec{F}_+\right) + \left(\vec{r}_- \times \vec{F}_-\right).$$

Le repère du système peut être pris en O^- sur la figure. Il est ainsi utile d'introduire $\vec{r}_+ = \frac{\vec{d}}{2}$ et $\vec{r}_- = -\frac{\vec{d}}{2}$ tel que les choses se simplifient lorsque le champ est uniforme

$$\vec{N}_1 = \left(\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_+\right) + \left(-\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_-\right) = q\vec{d}_1 \times \vec{E}.$$

Les couples de force sur les deux dipoles sont ainsi additifs et nous avons

$$\boxed{\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = q(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}.}$$

Pour le travail associé, nous pouvons tout d'abord écrire

$$W = \int \vec{N} \cdot d\vec{\theta} = \int (\vec{p} \times \vec{E}) d\vec{\theta}.$$

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\vec{p}||\vec{E}| \sin(angle(\vec{p}, \vec{E})) d\theta$$

L'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{E}$ est $\frac{\pi}{2} - \theta$ tel que

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\vec{p}||\vec{E}| \sin(angle(\vec{p}, \vec{E})) d(angle(\vec{p}, \vec{E})).$$

Le travail mène ainsi à

$$W = -[|\vec{p}||\vec{E}| \cos(angle(\vec{p}, \vec{E}))]_0^{\frac{\pi}{2}} = \vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Ce travail sera fourni au système par le champ électrique et donc nous avons que l'énergie reçue par le dipole est

$$E = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Cette énergie tend ainsi à aligner $\vec{p}$ avec $\vec{E}$. Le système trouvera un nouvel équilibre lorsque $N = 0$ i.e. $\vec{p} \parallel \vec{E}$.

---

3) Vérifier que le travail du couple est aussi équivalent à l'énergie de la rotation.
Avec la loi de Newton ceci va ainsi engendrer une rotation. L'étudiant(e) peut rappeler quelques étapes :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

tel que

$$||\vec{N}|| = I\dot{\omega} = \frac{dL}{dt}$$

Pour le travail nous pouvons aussi invoquer

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} N\, d\theta = \int I\dot{\omega} \frac{d\theta}{dt} dt = \int I\omega d\omega = \frac{1}{2}\int d(\frac{1}{2}\omega^2) = \frac{1}{2} I\omega^2 = \vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Nous vérifions ainsi la relation entre travail de la force et énergie de rotation.

Question 3

Nous adressons ensuite une question générale de mécanique quantique. Le programme inclut l'étude de résolution quantique en présence de potentiel. Ici, le puits carré infini est modifié en un puits quadratique en x^2, « qui a la forme d'un sourire ».

L'équation quantique à 1d de Schrödinger stationnaire prend la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Psi = E\Psi.$$

Justifier votre compréhension de cette équation, en particulier le premier terme.

1) En supposant une fonction d'onde de la forme $\phi(x) = C e^{\beta x^2}$ et en insérant cette hypothèse dans l'équation montrer que

$$\beta^2 = \frac{m^2\omega^2}{4\hbar^2}.$$

En déduire l'énergie associée.

$$-\frac{\hbar^2}{m}\beta + x^2\left(-\frac{2\hbar^2}{m}\beta^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\right) = E\phi(x).$$

L'énergie est indépendante de la position (quantifiée) et donc

$$\beta^2 = \frac{m^2\omega^2}{4\hbar^2}.$$

L'énergie associée est

$$E = -\frac{\hbar^2}{m}\beta.$$

$$\boxed{E=\frac{\hbar^2}{m}\frac{m\omega}{2\hbar}=\frac{\hbar\omega}{2}.}$$

2) Soit une particule dans un potentiel attractif

$$V(x)=V_0\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right).$$

Dessiner ce potentiel lorsque $V_0>0$. En supposant $V_0=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$ et en utilisant les résultats de la question 1, montrer ainsi l'égalité

$$(E+V_0)^2=V_0\frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

Quelle est ainsi l'énergie E associée? Quelle est la forme de la fonction d'onde pour $x\in[-a,a]$?
L'énergie associée est

$$E=-V_0+\frac{\hbar\sqrt{V_0}}{\sqrt{2m}a}.$$

Les fonctions d'onde au centre du puits sont de même forme qu'en 1 avec la même valeur de β :

L'équation de Schrödinger est

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi+V_0\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)\psi=E\psi.$$

Le but simple est de faire une analogie avec la première question en ré-écrivant cette équation comme

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi+V_0\frac{x^2}{a^2}\psi=(E+V_0)\psi.$$

Nous avons ainsi les identifications

$$\frac{V_0}{a^2}=\frac{1}{2}m\omega^2\rightarrow\omega^2=\frac{V_0}{a^2}\frac{2}{m}$$

$$E=\frac{\hbar\omega}{2}\rightarrow(E+V_0).$$

Nous obtenons ainsi

$$\boxed{(E+V_0)^2=\frac{\hbar^2\omega^2}{4}=\frac{\hbar^2}{4}\frac{V_0}{a^2}\frac{2}{m^2}=V_0\frac{\hbar^2}{2ma^2}.}$$

$$\beta=-\frac{m\omega}{2\hbar}=-\frac{m\sqrt{V_0}\sqrt{2}}{a\sqrt{m}2\hbar}=-\frac{\sqrt{V_0}}{a\sqrt{m}\sqrt{2}\hbar}.$$

La situation $V_0\rightarrow 0$ avec $E\rightarrow 0$ est un peu délicate car correspond à la particule libre. Nous devons imposer la continuité de l'énergie dans ce cas

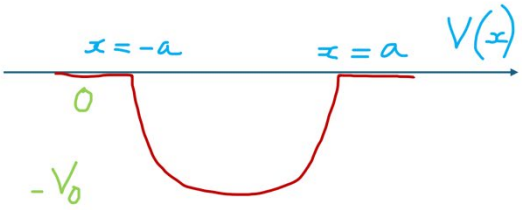
$$\frac{(\hbar k)^2}{2m}=E=0,$$

correspondant ainsi à $k \to 0$ ce qui est aussi en accord avec $\beta \to 0$. Cette limite est un peu artificielle ici, nous supposons $V_0 \neq 0$.

3) Nous supposons une onde plane incidente vers la droite dans la région $x < -a$. Ecrire les équations de raccord en $x = -a$ pour la fonction d'onde et sa dérivée. Qu'en déduisez-vous pour le coefficient de réflexion? Justifier votre réponse avec une explication physique.

Cette question intéressante fait réfléchir. Nous mentionnons ici deux réponses formulées cette année par deux élèves. À vous de dire si l'une est correcte ou non et quelle est votre proposition.

Vous pouvez aussi essayer de réfléchir sur une justification associée à l'énergie.



Réponses Etudiants 2

$$|T| = \frac{2e^{-\beta a}}{\sqrt{k^2 + 4a^2\beta^2}} \quad (1)$$

$$\tan(ka + \varphi) = -\frac{2a}{k} \quad (2)$$