Exemple d'exercices - Epreuve de Mathématiques, Filière PC

Exercice

1.Déterminer les réels qui s'écrivent de la forme $\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i/i$ où $\varepsilon_i \in \{0,1\}$.
2. Même question avec $\varepsilon_i = 0$ à partir d'un certain rang.

Exercice

Soit $\varphi \in C^\infty([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que l'une des deux hypothèses qui suit est vérifiée :

1. $|\varphi'| \geqslant 1$ sur $[a,b]$ et φ' est monotone.
2. il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $|\varphi^{(k)}| \geqslant 1$ sur $[a,b]$.

Montrer qu'il existe une constante $c_k > 0$ indépendante de φ et de $\lambda > 0$ telle que

$$\Big| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(t)} dt \Big| \leqslant c_k \lambda^{-1/k}.$$

Exercice

1. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que QAP et QBP sont triangulaires supérieures.
2. Si A et B sont des matrices réelles ?

Exercice

Soit $A = (a_{ij})_{1,\leq i,j,\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. On rappelle que $\|A\|_\infty := \max\limits_{1,\leq i,j,\leq n} |a_{ij}|$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

1. Nous allons montrer que la série de matrices $E_A := \sum\limits_{k>0} \dfrac{1}{k!} A^k$ est bien définie.
   (a) Soient A, $B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.
   (b) En déduire que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $k \in \nabla$, $\|A^k\|_\infty \leq (n\|A\|_\infty)^k$.
   (c) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que la série de terme général $\left(\frac{1}{k!}A^k\right)_{k\in N}$ converge.
2. Montrer que si A est diagonalisable, alors E_A l'est aussi.
3. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer E_A, E_B et E_{A+B}.
   (b) Montrer que $E_A E_B \neq E_{A+B}$.
   (c) Vérifier que $AB \neq BA$.
4. On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer E_A et E_B.
   (b) Calculer E_{A+B}. Que peut-on conclure ?
5. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4i\pi \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4i\pi \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer E_A, E_B et E_{A+B}.
   (b) Montrer que $AB \neq BA$.
   (c) Calculer $E_A E_B$. Que peut-on en conclure ?

Exercice

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, on denote par d_i le i-ème mineur principal de A (c'est-à-dire, le déterminant de la matrice extraite formée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A).

1. Démontrer que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $d_i \neq 0$, si et seulement s'il existe une matrice triangulaire inférieure L avec des 1 sur la diagonale et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.
2. Montrer que dans ce cas, le couple (L,U) est unique.
3. Comment peuvent s'exprimer les termes diagonaux de U en fonction des mineurs principaux d_i ?

Exercice

Soit Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même donnée par $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1) Déterminez $\operatorname{Ker}\Delta$ et $\operatorname{Im}\Delta$.

2) a) Montrez qu'il existe une unique base $(H_n)_n$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $H_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$

$$\Delta(H_n) = H_{n-1} \qquad \text{et} \qquad H_n(0) = 0\,.$$

b) Donnez l'écriture de P dans la base (H_n)

c) Donnez H_n explicitement.

3) Soit P un polynôme de degré p, montrez l'équivalence des 4 assertions suivantes :

i) P prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$

ii) P prend des valeurs entières sur $\{0, 1, \ldots, p\}$

iii) Les coordonnées de P dans la base (H_n) sont entières

iv) P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.

Exercice

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ et de vecteurs propres associés $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Pour tout sous-espace $M \subset \mathbb{R}^n$ on pose

$$\lambda[M] = \inf\{\langle u\,,\, Au\rangle\,;\ u \in M, \|u\| = 1\}\,.$$

1) Montrez que cet inf est un min

2) On note G_k l'ensemble des sous-espaces $M \subset \mathbb{R}^n$ de dim k. Montrez que

$$\lambda_k = \max_{M \in G_{n-k+1}} \lambda[M]\,.$$

3) Soit $P \in M_{n,m}$ tel que $P^T P = I_m$.

a) Que peut-on dire de m ? Que peut on dire de P ?

b) On pose $B = P^T A P \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$, on note $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_m$ ses valeurs propres ordonnées. Montrez que

$$\lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{n-m+k}\,.$$

.

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\, x^n (bx - a)^n\,.$$

1) Montrez que P_n et toutes ses dérivées prennent des valeur entières en 0 et en a/b.

2) Montrez que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi P_n(x)\, \sin(x)\, dx = 0$$

3) En déduire une preuve que π est irrationnel.