Exemple de sujets - Epreuve de Physique, Filière MP

Exercice 1:
Un bateau est sur un petit lac, pas trop profond. Que fait le niveau de l'eau du lac quand quelqu'un sur le bateau lance une bouée dans l'eau ? Même question quand il jette une ancre.

Solution: Cet exercice pensé comme un premier exercice rapide, nous a surpris par les difficultés qu'il a pu générer chez certains candidats.
Il s'agissait simplement de considérer la poussée d'Archimède, et de faire attention au fait que l'ancre et la bouée étaient déjà dans un bateau sur le lac avant d'être jetés.
Quand la bouée est jetée elle continue de flotter, ce qui in fine ne change rien au volume d'eau déplacé par le bateau (libéré de la bouée) et la bouée, le niveau ne change pas.
Quand c'est l'ancre, elle coule jusqu'au fond du lac, où une réaction compense ce qu'il manque à la poussée d'Archimède. Le volume d'eau déplacé est donc juste le volume de l'ancre, alors que quand elle était dans le bateau, c'était le volume d'eau équivalente à son poids. Le niveau du lac baisse.

Exercice 2:
Pic de potentiel dans un puits profond
Une particule de masse m est soumise au potentiel :

$$V(x)=\begin{cases} +\infty \text{ si } x<0 \\ V_0 \text{ si } \dfrac{a}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}<x<\dfrac{a}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} \\ +\infty \text{ si } a<x \end{cases}$$

On étudie l'état de plus basse énergie dans la limite $\varepsilon \to 0, V_0 \to +\infty,\ V_0\ \varepsilon = \gamma$

Donner l'expression de la fonction d'onde de cet état, et la valeur de son énergie, pour γ donné.

Dans cet exercice, une des difficultés rencontrée aura été que le puits est centré sur a/2, ce qui peut un peut compliquer les calculs.

Solution

$$\psi(x,t)=\varphi(x)\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right),\ \varphi(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0 \text{ ou } x>a\\ A\sin(kx) \text{ si } 0<x<\frac{a}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\\ B\sin(kx+\phi) \text{ si } \frac{a}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<x<a\end{cases}$$

avec $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

$\varphi(a)=0\Rightarrow ka+\phi=0(\pi)$

Par symétrie, il faut que $|A|=|B|$. On peut prendre $A=B$, il faut alors déterminer ϕ.

Il est clair que $\varphi(x)$ doit être ou bien symétrique, ou bien antisymétrique, par rapport à $x=\frac{a}{2}$.

On traduit à partir de maintenant que $\varepsilon\to 0$.

Si elle est antisymétrique, $\varphi(x)$ ne peut être continue en $x=\frac{a}{2}$ que si $\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=0$, ce qui n'est pas le cas quand $\gamma\to 0$, car alors $\varphi(x)=A\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

Donc $\varphi(x)$ est symétrique : $\varphi(\frac{a}{2}+u)\underset{u>0}{=}\varphi(\frac{a}{2}-u)$

Il faut trancher entre $ka+\phi=0(2\pi)$ et $ka+\phi=\pi(2\pi)$.

Si $ka+\phi=0(2\pi)$:

$\varphi(\frac{a}{2}+u)\underset{u>0}{=}A\sin\left(k(\frac{a}{2}+u-ka)\right)=A\sin\left(k(u-\frac{a}{2})\right)=-A\sin\left(k(\frac{a}{2}-u)\right)\underset{u>0}{=}-\varphi\left(\frac{a}{2}-u\right)$ et $\varphi(x)$ est antisymétrique.

Si $ka+\phi=\pi(2\pi)$, alors $\varphi(x)$ est bien symétrique :

$$\varphi(\frac{a}{2}+u)\underset{u>0}{=}A\sin\left(k(\frac{a}{2}+u-ka)+\pi\right)=-A\sin\left(k(u-\frac{a}{2})\right)=A\sin\left(k(\frac{a}{2}-u)\right)\underset{u>0}{=}+\varphi\left(\frac{a}{2}-u\right)$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}A\sin(kx) \text{ si } 0<x<\frac{a}{2}\\ -A\sin(k(x-a)) \text{ si } \frac{a}{2}<x<a\end{cases}$$

A ce stade il reste à traduire la **discontinuité** de la dérivée première $\varphi'(x)$ en $x=\frac{a}{2}$.

$$\varphi'\left(\frac{a^-}{2}\right)=kA\cos\left(k\frac{a}{2}\right),\ \varphi'\left(\frac{a^+}{2}\right)=-kA\cos\left(k\frac{a}{2}\right)$$

$$\varphi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\varphi(x)=0\Rightarrow\int_{\frac{a}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{a}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\varphi''(x)dx=\frac{2m}{\hbar^2}\int_{\frac{a}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{a}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}(V_0-E)\varphi(x)dx$$

$$\Rightarrow\varphi'\left(\frac{a}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\varphi'\left(\frac{a}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)\int_{\frac{a}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{a}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\varphi(x)dx\underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow}\varphi'\left(\frac{a^+}{2}\right)-\varphi'\left(\frac{a^-}{2}\right)=\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)\varphi\left(\frac{a}{2}\right)\varepsilon$$

$\Rightarrow \varphi'\left(\frac{a}{2}^{+}\right) - \varphi'\left(\frac{a}{2}^{-}\right) = \frac{2m}{\hbar^2}\gamma\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$ donc $-2kA\cos\left(k\frac{a}{2}\right) = \frac{2m}{\hbar^2}\gamma A\sin\left(k\frac{a}{2}\right) > 0$

On obtient $\text{cotan}\left(k\frac{a}{2}\right) = \frac{-m\gamma}{k\hbar^2}$, $\cos\left(k\frac{a}{2}\right) < 0$.

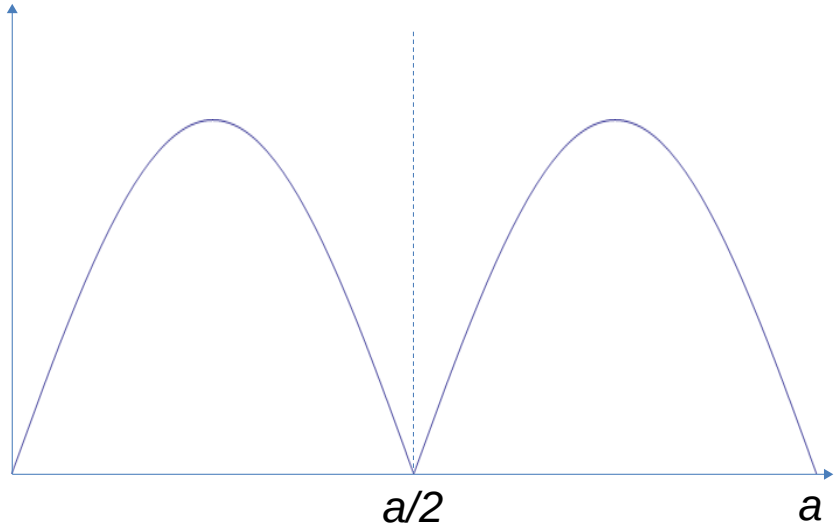
Soit $k\frac{a}{2}\text{cotan}\left(k\frac{a}{2}\right) = \frac{-m\gamma}{\hbar^2}\frac{a}{2} \Rightarrow -u\ \text{cotan}(u) = \frac{m\gamma}{\hbar^2}\frac{a}{2} > 0$, $\cos(u) < 0$ avec $u = k\frac{a}{2}$.

Pour γ donné, $-u\ \text{cotan}(u) = \frac{m\gamma}{\hbar^2}\frac{a}{2}$ donne la valeur de *u* puis celle de *k*, et de $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

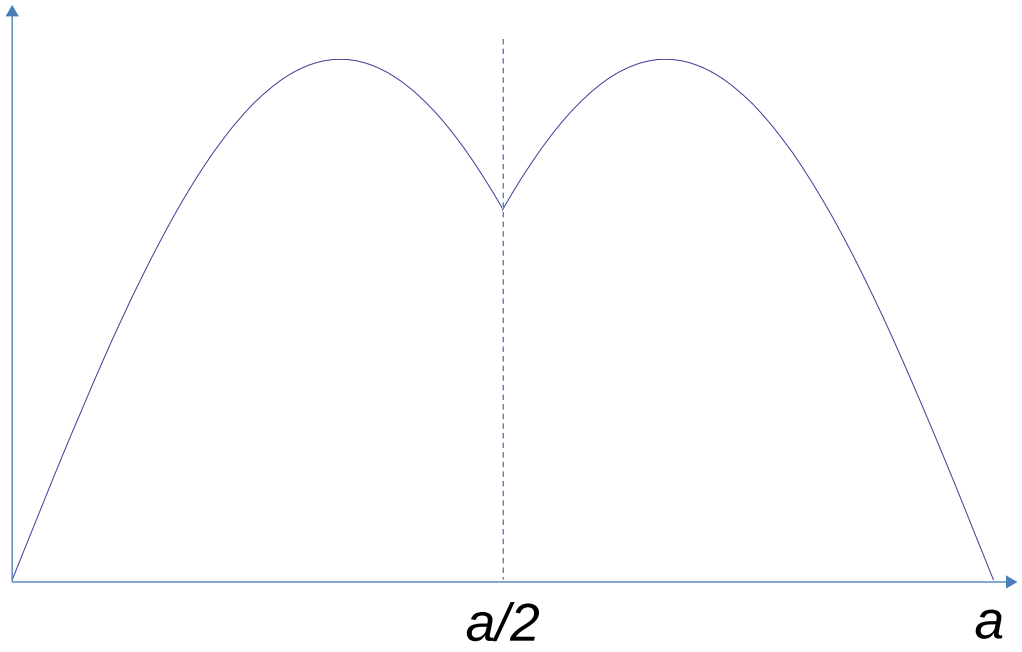
La fonction $f(u) = -u\ \text{cotan}(u)$ vérifie : $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(u) \underset{u\to\pi}{\to} +\infty$.

Quand $\gamma << \frac{2\hbar^2}{ma}$, $u \approx \frac{\pi}{2}$, $k \approx \frac{\pi}{a}$, $E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$: on retrouve le puits infini de largeur *a*, $\varphi(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

Quand $\gamma >> \frac{2\hbar^2}{ma}$, $u \approx \pi$, $k \approx \frac{2\pi}{a}$, $E = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$: on obtient la même énergie que celle d'un puits de largeur $\frac{a}{2}$, **mais pas la même fonction d'onde**, $\varphi(x) \underset{x<\frac{a}{2}}{=} A\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$, $\varphi(x) \underset{x>\frac{a}{2}}{=} -A\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$



Cas général : valeur intermédiaire de γ

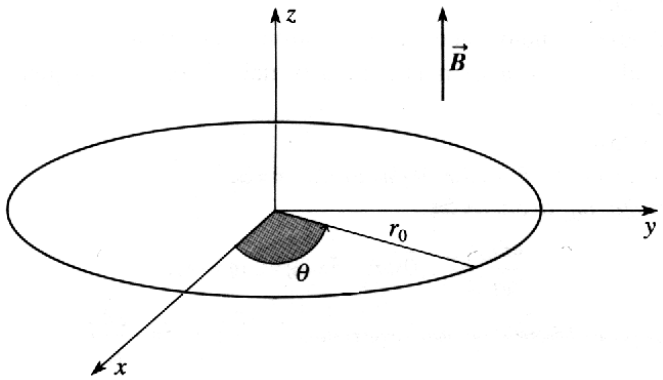


Exercice 3: Stabilité d'une trajectoire

Une particule de charge q <u>négative</u> et de masse m décrit dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r_0, à la vitesse V_0.

Le référentiel d'étude $\mathbf{R}$(Oxyz) est supposée galiléen.

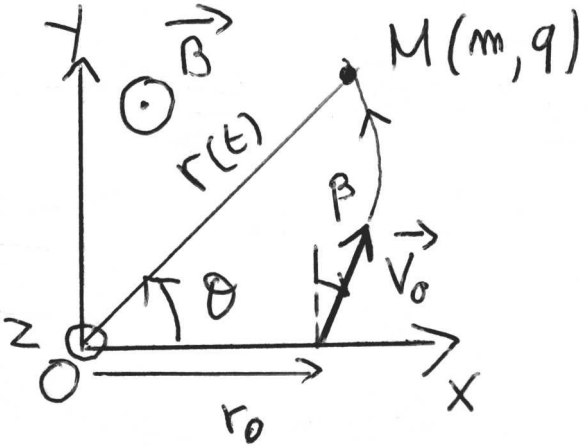
0) Quelle doit être la norme Bo du champ magnétique pour une telle trajectoire ?



1) En fait le champ magnétique, constant dans le temps, n'est pas uniforme (c'est ce qui se passe en réalité dans une structure de type cyclotron). On suppose ici la symétrie cylindrique d'axe (Oz) conservée et on propose,
au voisinage de la trajectoire circulaire précédente, une dépendance du champ B en *r* , distance à l'axe (Oz), selon la loi $B_z = B_o\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\alpha}$ où α est une constante réelle positive. α est appelé indice du champ magnétique.

a) En utilisant les coordonnées polaires, écrire les équations différentielles du mouvement de la particule dans le plan *(x0y)* .

b) La vitesse n'étant plus parfaitement orthoradiale, le vecteur vitesse initiale fait un angle β très faible avec la direction orthoradiale. La norme de la vitesse est toujours égale à V_o (correspondant à la trajectoire circulaire de rayon r_o de la question 1).
Etant donné que la vitesse n'est plus purement orthoradiale la trajectoire sera quasi circulaire et nous poserons $r(t) = r_o(1 + \varepsilon(t))$ avec . A t = 0, r vaut r_o.



- À quelle condition portant sur α la trajectoire est-elle stable ?
- Dans le cas où α = 3/4 , déterminer r(t) en fonction des données.

Solution

$$m\dot{v}_x = F_x = qv_y B$$
$$m\dot{v}_y = F_y = -qv_x B$$

$$\ddot{v}_x + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0 \qquad \frac{|q|B}{m} = \omega \text{ et } v_o = r_o\omega \text{ donc } B_o = \frac{m}{q r_o} v_o$$

1)

En coordonnées polaires $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta = \frac{q}{m}(v_\theta \vec{e}_r - v_r \vec{e}_\theta) B_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\alpha}$

Donc (i) $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -\frac{q}{m}\dot{r} B_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\alpha}$ et (ii) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{q}{m} r\dot{\theta} B_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\alpha}$

Posons $r = r_o(1+\varepsilon(t))$ alors

(i) donne $r_o(1+\varepsilon(t))\ \ddot{\theta} + 2r_o\dot{\varepsilon}\ \dot{\theta} = -\frac{q}{m} r_o\dot{\varepsilon}\ B_o(1+\varepsilon(t))^{-\alpha}$

donc au premier ordre ($\dot{\theta} = \omega$ à l'ordre 0) : $\ddot{\theta} + 2\dot{\varepsilon}\ \omega = \dot{\varepsilon}\ \omega$ soit $\ddot{\theta} = -\dot{\varepsilon}\ \omega$ donc $\dot{\theta}(t) = \omega(1 - \varepsilon(t))$

(ii) donne $\ddot{\varepsilon} - (1+\varepsilon)\omega^2(1-\varepsilon)^2 = \frac{q}{m}(1+\varepsilon)\omega(1-\varepsilon) B_o (1+\varepsilon)^{-\alpha}$

soit $\ddot{\varepsilon} - (1+\varepsilon)\omega^2(1-2\varepsilon) = -\omega^2(1-\varepsilon^2)(1-\alpha\varepsilon) \qquad \ddot{\varepsilon} + (1-\alpha)\omega^2\varepsilon = 0$

stable (oscillateur) si $1 > \alpha$

si α = ¾) $\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega^2}{4}\varepsilon = 0$ donc $\varepsilon(t) = A\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ et $\dot{\theta}(t) = \omega\left(1 - A\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$

$$\tan(\beta) = \frac{v_r}{v_\theta} = \frac{\dot{r}(t=0)}{r(t=0)\dot{\theta}(t=0)} = \frac{r_o A\omega}{r_o 2\omega} = \frac{A}{2} \qquad \varepsilon(t) = 2\tan\beta \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$