ÉPREUVE D'ANALYSE DE DOCUMENTS SCIENTIFIQUES

FILIÈRE MP – 2026

Dossier 10

Ce dossier est constitué d'un texte tiré d'un texte à vocation pédagogique sur la fin de vie des étoiles de faible masse.

Dans votre exposé, qui durera environ 15 minutes et qui synthétisera le contenu du dossier, vous chercherez à montrer comment vos connaissances en physique vous permettent de comprendre et d'expliquer les éléments présentés dans l'ensemble du dossier.

On veillera lorsque cela est possible à justifier les résultats numériques ou théoriques annoncés et à ne pas se contenter de répéter ou de paraphraser le texte.

Remarques

— L'usage de la calculatrice est interdit pendant la phase de préparation.

— Les textes peuvent être annotés pendant la période de préparation. Mais, à l'issue de l'épreuve, tous les documents (brouillons, transparents, et textes) doivent être impérativement remis à l'examinateur.

— Les candidates et candidats sont invités à éviter d'écrire leur présentation en tout petits caractères, peu lisibles lors de la présentation devant l'examinateur.

— Le dossier proposé est constitué de reproductions de textes ou d'extraits de textes scientifiques d'origines variées. Ces documents, comme tout document scientifique, peuvent être critiqués, voire contenir des erreurs. Si tel est le cas, cela ne doit pas gêner le/la candidat(e) au cours de sa préparation. Au contraire, il/elle pourra le mentionner au cours de l'exposé ou de la discussion avec l'examinateur.

— Certains textes ont subi des coupes partielles ; avant l'établissement stable de l'image sur la tablette, le texte coupé peut apparaître brièvement : ce phénomène parasite est à ignorer. De même, l'élimination de pages complètes peut introduire une discontinuité dans la numérotation des pages du document final.

1 Introduction

Pendant les phases stables, une étoile est généralement modélisée comme le résultat de 2 pressions antagonistes dont l'une est due à la force de gravité et qui tend la comprimer. Durant la première partie de sa vie l'étoile fusionne de l'hydrogène en hélium, l'autre pression est alors d'origine cinétique. On dit que l'étoile est sur la séquence principale. A l'issue des phases de fusion, un nouveau type de pression doit intervenir. Ce texte est une introduction aux modèles les plus simples permettant de rendre compte des propriétés des étoiles de faibles masses en fin de vie. Le modèle des naines blanches présenté en fin de texte a été obtenu par S. Chandrasekhar durant son voyage en bateau de Madras à Londres en 1930, c'était la première fois que l'on combinait les toutes jeunes théories quantique et relativiste. Il obtint pour ce travail le prix Nobel en 1984.

2 La vie sur la séquence principale

En physique comme ailleurs la pression P est une grandeur qui représente une force F exercée sur une surface S

$$P = F/S \tag{1}$$

Dans le cas d'une étoile sphérique et de la force de gravitation de Newton nous avons donc

$$P_g = -\frac{GM^2}{R^2}/4\pi R^2 = -\frac{GM^2}{4\pi R^4} \tag{2}$$

où M et R représentent respectivement la masse et le rayon de l'étoile considérée. Tant que l'étoile est sur la séquence principale cette pression est contre-balancée par la pression cinétique ou thermique due à l'agitation des particules qui constituent l'étoile : En assimilant cette dernière à un gaz parfait formé de N particules occupant un volume V à la température T, on a la relation bien connue

$$PV = NkT \tag{3}$$

ou k est la constante de Boltzmann. Si l'étoile est sphérique et principalement constituée d'hydrogène, si m_p représente la masse du proton (en négligeant la masse de l'électron) on a $N = M/m_p$ et $V = 4\pi R^3/3$. Ainsi

$$P_t = \frac{3MkT}{4\pi R^3 m_p} \tag{4}$$

La pression gravitationnelle est opposée à la pression thermique (dont elle est la source), une étoile de la séquence principale est simplement le résultat de l'équilibre entre ces deux termes antagonistes $P_g + P_t = 0$. Cette relation permet d'obtenir la température en fonction de la masse et du rayon

$$T = \frac{1}{3}\frac{GMm_p}{k\ R} \tag{5}$$

pour le Soleil, on trouve une température de l'ordre de quelques millions de Kelvins. C'est bien l'ordre de grandeur de la température centrale du Soleil. Une autre pression peut aussi jouer son rôle, il s'agit de la pression de radiation donnée par la formule de Stefan-Boltzmann

$$P_r = \sigma T^4 \qquad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{45\hbar c^3} \tag{6}$$

Elle n'intervient globalement que pour 1% de la pression totale, mais elle demeure fondamentale dans les régions centrales où la température est la plus élevée. De plusieurs millions de Kelvins au centre, la température du Soleil décroît jusqu'à 5700 Kelvins en surface. Cette température centrale et le confinement gravitationnel sont suffisants pour déclencher des réactions de fusion thermonucléaire c'est le cycle PP (voir figure 1).

Dans cette réaction en chaîne, deux noyaux d'hydrogène ionisé (protons) fusionnent en 3 étapes indiquées sur la figure ci-dessus pour former un atome d'hélium. Les photons de très haute énergie, produits de cette réaction, sont à l'origine du rayonnement solaire [1]. Une fois tout l'hydrogène consommé le cycle PP stoppe. L'étoile quitte la séquence principale. La pression de radiation associée aux photons ne permet plus d'assurer la stabilité du cœur de l'étoile : Plus rien ne s'oppose à la pression gravitationnelle qui fait donc s'effondrer le cœur de l'étoile et du même coup augmenter sa température. Une fois la centaine de millions de Kelvins atteinte, une nouvelle réaction thermonucléaire peut s'amorcer : le processus triple α (voir figure 1).

Dans cette réaction, trois atomes d'hélium (particule α) forment un atome de carbone et libèrent de l'énergie : c'est le flash de l'hélium. Pendant que le cœur se contracte, les enveloppes externes de l'étoile s'étendent et se refroidissent, le nouvel

1. Les divers processus de transport à travers le Soleil permettent de calculer que les photons gamma créés au centre du Soleil, mettent environ un million d'années pour atteindre la surface au niveau de laquelle ils sont émis sous la forme d'un rayonnement de corps noir à 5700 Kelvins.

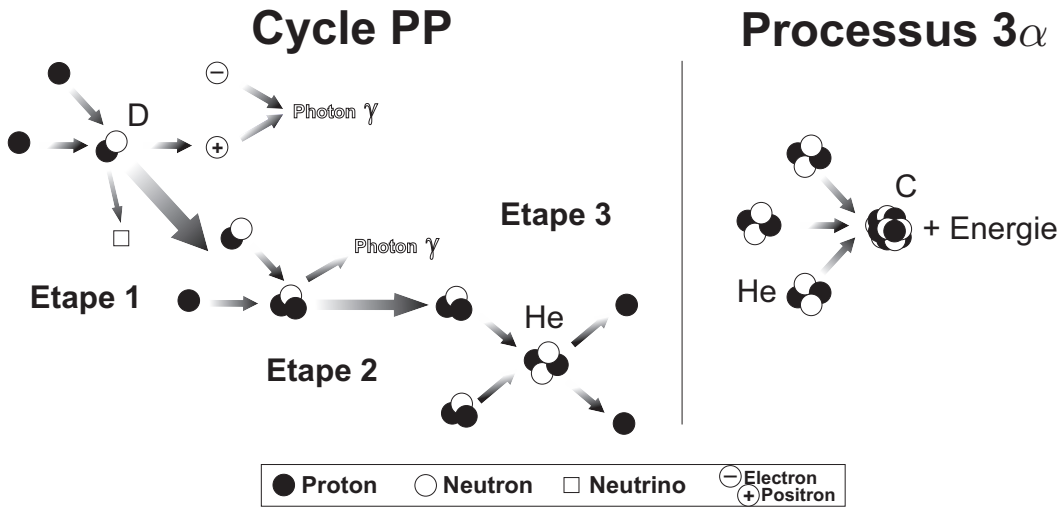


FIGURE 1 – Le cycle Proton-Proton à gauche, le processus triple$-\alpha$ à droite

équilibre est appelé géante rouge. Lorsque la géante rouge a consommé tout son hélium, un nouvel effondrement se produit, c'est à présent le tour du cœur de carbone. Si la masse de l'étoile est inférieure à $8M_\odot$, la pression gravitationnelle ne permet pas d'atteindre les $6 \times 10^8 K$ nécessaire à la fusion du carbone. Les enveloppes résiduelles d'hélium et d'hydrogène échappent à la gravité de l'étoile : elles sont évacuées dans l'espace. On obtient une nébuleuse planétaire que l'on compte parmi les plus beaux objets du ciel nocturne et qui n'ont pourtant rien à voir avec les planètes. Quel est donc le stade ultime, dans lequel on s'attend à retrouver les cadavres d'étoile de masse inférieure à $8M_\odot$? La réponse fut apportée vers 1930 par un jeune physicien indien qui allait devenir l'un des plus grand astrophysicien du XX^{ème} siècle : Subrahmanyan Chandrasekhar.

3 Physique de l'état dégénéré

3.1 La découverte de Sirius B

En 1838, en utilisant la méthode des parallaxes*, F.W. Bessel détermina la distance de l'étoile 61 de la constellation du Cygne. Encouragé par ses résultats, il entreprit la mesure de la distance de nombreuses étoiles dont Sirius, de la constellation du Grand Chien, l'étoile la plus brillante du ciel nocturne. Son angle de parallaxe de 0.377 seconde d'arc correspond à une distance de seulement 8,65 années lumière. En suivant le mouvement de cette dernière, il constata une perturbation périodique. Après 10 années de minutieuses observations, Bessel conclut que Sirius était en fait une étoile double, et bien qu'incapable d'observer le compagnon de l'étoile brillante, il déduisit que celui-ci avait une période orbitale d'environ 50 ans. C'est ainsi que de nombreux astronomes tentèrent d'observer le chiot, compagnon ténu de l'étoile du chien. Cette quête fut réalisée en 1862 par A. Clark qui utilisa pour cet exploit une nouvelle génération de télescopes de 50 cm fabriqués par son père. La brillante Sirius A se révéla environ mille fois plus brillante que son chiot Sirius B. Le détail des orbites permit de peser ces deux étoiles, et l'on conclut que Sirius A avait une masse de $2{,}3M_\odot$ et son chiot $1M_\odot$. Les mesures de Clark avaient été rendues possibles par le passage au périastre* de Sirius B, seul moment favorable aux observations, compte tenu de la différence de luminosité ($L_A = 23.5L_\odot$ et $L_B = 0.03L_\odot$). Au passage suivant (... 50 ans plus tard ...!), les progrès de la spectroscopie allaient permettre de mesurer la température de surface de Sirius B. Les faibles caractéristiques de celle-ci laissaient présager un astre froid et rouge. En 1915, les observations de W. Adams qui travaillait au fameux observatoire du Mont Wilson montrèrent un chiot bleu émettant dans l'ultraviolet et dont la température d'environ 27 000 Kelvins, est bien supérieure aux 9910 de Sirius A.

Les toutes nouvelles lois du rayonnement du corps noir, qui permirent à Planck et Einstein de poser les bases de la mécanique quantique, s'appliquent à Sirius B : la détermination du rayon ($0.008\ R_\odot$) et de la densité de Sirius B (environ 4 tonnes par cm^3) furent un véritable coup de tonnerre dans la communauté des astrophysiciens. Si certains trouvaient cette valeur absurde, d'autres, comme A. Eddington, voyaient en elle la source de nouvelles avancées en physique. Profitant du champ gravitationnel intense que devrait créer un tel astre, il calcula la déviation que celui-ci devait induire sur les rayons lumineux conformément à la toute nouvelle théorie de la relativité générale. La vérification expérimentale de cette déviation en 1925, toujours par Adams, fit d'une pierre deux coups. La nouvelle théorie d'Einstein se voyait couronnée d'un nouveau succès et le ciel des astronomes se voyait, pour la première fois, irréfutablement orné d'un objet compact nommé naine blanche.

3.2 La théorie de Chandrasekhar

Bien qu'Eddington fut l'un des premiers à prendre en considération les propriétés extraordinaires de ces naines blanches, il ne pensait pas qu'un nouveau type de pression pourrait les expliquer. Il fut d'ailleurs l'un des principaux détracteurs de la nouvelle théorie proposée par un jeune indien.

A l'age de 17 ans, en 1928 dans la ville de Madras sur le golfe du Bengale, le jeune et brillant étudiant Subrahmanyan Chandrasekhar sollicite une entrevue à l'éminent A. Sommerfeld, alors en visite dans son université. C'est selon la légende, sur les conseils du Maître, à l'issue de cette entrevue, que le jeune homme se serait tourné vers le couplage entre deux nouvelles théories la mécanique quantique et la relativité restreinte. En 1930, il s'embarque, la dernière semaine de juillet, pour un voyage de 18 jours vers Cambridge où il venait d'être accepté pour un doctorat dans le prestigieux laboratoire de ses héros Eddington et Fowler. Il avait décidé de s'intéresser durant la traversée au problème soulevé par Eddington sur l'origine de ces naines blanches et d'étudier une piste proposée par Fowler. Il réalisera en fait un travail qui marquera l'histoire des sciences et qui lui vaudra le prix Nobel 54 ans plus tard !

3.2.1 Un nouveau type de pression

La nouveauté introduite par Fowler est la prise en compte d'un nouveau type de pression d'origine quantique : La pression de dégénérescence des fermions.
Un des fondements de la nouvelle mécanique quantique est la dualité onde-corpuscule étendue à tous les types de particules (Einstein l'avait compris avec le photon dans l'effet photo-électrique dès 1905, de Broglie l'étendra à une particule quelconque dans les années 20). La conséquence pour la pression est claire : si l'on comprime de plus en plus un ensemble de particules, "l'espace" alloué à chacune d'entre elles, que l'on peut imaginer comme une boîte, va diminuer. Si d'autre part on associe une longueur caractéristique à une particule de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$: sa longueur d'onde de de Broglie λ telle que

$$p = m\,|\overrightarrow{v}| = \frac{h}{\lambda} \quad , \tag{7}$$

où h est la constante de Planck, il va exister un taux de compression tel que la taille caractéristique de l'espace alloué à chaque particule va devenir égal à sa longueur d'onde. Si l'on continue à comprimer le système, la taille des boites diminuera et la longueur d'onde des particules dans chaque boite devra rétrécir pour ne pas empiéter sur la particule voisine... Comme le montre la relation de de Broglie (7), une diminution de la longueur d'onde d'une particule est une augmentation de sa vitesse. Il s'en suit une augmentation de l'intensité des chocs entre les particules, ce qui fait donc croître la pression.
Pour que ce raisonnement s'applique, il faut que la particule concernée refuse d'empiéter sur l'espace alloué à ses voisines. La mécanique quantique prévoit justement l'existence de deux types de particules : d'une part les fermions (électrons, protons, neutrons ...) qui respectent leurs congénères, et sont soumis au principe d'exclusion de Pauli, d'autre part les bosons (photons,...) qui acceptent d'occuper à plusieurs un même état quantique. La pression de claustrophobie est donc réservée aux fermions. Elle est appelée pression de dégénérescence quantique car toutes les particules dégénèrent dans leur état le plus fondamental. Bien entendu, ce type de pression existe dans tous les états de la matière, mais ne devient non négligeable que pour les très fortes densités comme c'est le cas dans les naines blanches.

La prise en compte de ce genre de pression dans l'équilibre des étoiles peut s'envisager sous plusieurs formes, nous considérerons l'approche suivie par Fowler puis Chandrasekhar, c'est-à-dire celle de la physique statistique quantique.

3.2.2 Principes de la physique statistique

Nous considérons que notre naine blanche est une sphère de rayon R composée de n atomes de carbone, pour simplifier les calculs nous supposerons que la densité ρ est constante dans l'étoile. La température de plusieurs dizaines de milliers de Kelvins assure une ionisation complète des atomes de carbone. Le confinement gravitationnel assure donc l'existence d'un gaz de $N = Zn$ électrons et de masse $M = ANm_p/Z$. Dans cette dernière relation nous avons négligé la masse de l'électron devant celle du proton (prise égale à celle du neutron), A représente le nombre de nucléons dans le noyau et Z le numéro atomique, nous avons donc pour le carbone ordinaire $Z = 6$ et $A = 12$

$$6n = N, \quad M = 2Nm_p \quad \text{soit} \quad N = \frac{M}{2m_p} \tag{8}$$

La pression de dégénérescence est due [2] aux électrons qui sont les plus rapides et peuvent être considérés libres de toute force entre deux collisions : On parle d'un gaz parfait quantique.

Considérons l'ensemble $\mathbb{E}$ de tous les états accessibles à ces électrons (on parle en physique d'espace des phases), et découpons-le en cellules regroupant tous les électrons ayant la même énergie ε_i à $d\varepsilon_i$ près. Chaque cellule contient n_i électrons. Nous avons donc de façon formelle

$$N = \sum_i n_i \quad \text{et} \quad E = \sum_i n_i \varepsilon_i \tag{9}$$

2. tout au moins dans un premier temps ...

où E représente l'énergie totale des électrons contenus dans l'étoile. L'idée même de la physique statistique est d'abandonner la vision discrète des choses contenue dans les relations (9) , pour une vision continue et probabiliste. Prenant comme axiome que les particules sont indépendantes, elles sont décrites par une seule densité de probabilité de présence dans l'espace des phases $f(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}, t)$, qui représente la probabilité pour qu'à l'instant t une particule (représentative de toutes) soit en $\overrightarrow{r}$ à $\overrightarrow{dr}$ près, avec une impulsion $\overrightarrow{p}$ à $\overrightarrow{dp}$ près.

Il est bien connu qu'un niveau d'énergie peut être occupé par plusieurs particules. Dans le cas de l'atome d'hydrogène par exemple, chaque niveau d'énergie

$$\epsilon_n = -\frac{m_p\, e^4}{2\hbar}\frac{1}{n^2} \qquad n = 1, 2, ... \tag{10}$$

se décompose en $g_n = n^2$ états accessibles à l'électron. On dit que chaque niveau d'énergie est dégénéré.
Si on dispose de N particules, la cellule i regroupera les n_i particules d'énergie $\epsilon \in [\epsilon_i, \epsilon_i + d\epsilon_i[$, et sera subdivisée en g_i micro-cellules correspondant à la dégénérescence de ϵ_i. On appelle complexion une façon de répartir ces N particules dans toutes ces micro-cellules.

Le grand mérite de L. Boltzmann fût de comprendre que l'on pouvait relier l'état d'équilibre d'un système au nombre de complexions qui le caractérise. En définissant l'entropie par le logarithme du nombre Ω de complexions distinctes multiplié par la constante de Boltzmann,

$$S = k \ln \Omega \quad , \tag{11}$$

il comprit que l'état d'équilibre d'un système était celui qui rendait l'entropie maximale.

Le nombre total de complexions distinctes réalisables dépend fortement des particules que l'on considère et des propriétés qu'on leur attribue, c'est en tous cas un simple calcul de dénombrement :

— En mécanique classique, les particules sont discernables et ne sont pas soumises à un principe d'exclusion

$$\Omega_{cla} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \tag{12}$$

— En mécanique quantique, les particules de même type sont indiscernables. Il existe 2 familles de particules : les fermions et les bosons. Les fermions sont soumis au principe d'exclusion de Pauli (une micro-cellule est occupée par un seul fermion à la fois), les bosons n'y sont pas soumis ...

$$\begin{aligned} \Omega_{bos} &= \prod_i C_{g_i}^{g_i+n_i} \qquad \text{pour les bosons} \\ \Omega_{bos} &= \prod_i C_{n_i}^{g_i} \qquad \text{pour les fermions} \end{aligned} \tag{13}$$

En cherchant le maximum de S sous les contraintes $N = cste$ et $E = cste$, et en utilisant la formule de Stirling

$$\text{Si } n \gg 1, \quad \ln n! \simeq n \ln n - n \tag{14}$$

on trouve les diverses distributions d'équilibre pour les gaz parfaits

$$\begin{aligned} n_i^{mb} &= \tfrac{g_i}{\exp[\beta\varepsilon_i]} && \text{Distribution de Maxwell-Boltzmann (Classique)} \\ n_i^{be} &= \tfrac{g_i}{\exp[\beta(\varepsilon_i-\mu)]-1} && \text{Distribution de Bose-Einstein pour les bosons (Quantique)} \\ n_i^{fd} &= \tfrac{g_i}{\exp[\beta(\varepsilon_i-\mu)]+1} && \text{Distribution de Fermi-Dirac pour les fermions (Quantique)} \end{aligned} \tag{15}$$

Le potentiel chimique μ dépend de la température, il est associé à la conservation du nombre de particules. Si celui-ci n'est pas conservé, alors $\mu = 0$. La grandeur β est aussi reliée à la température d'équilibre T du système

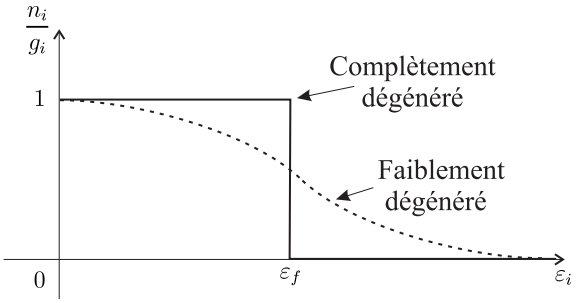
$$\beta = \frac{1}{kT} \tag{16}$$

Le régime quantique apparaît aux fortes densités et/ou aux basses températures. Lorsque $T \to 0$, les bosons se condensent, alors que les fermions voient leur énergie majorée par une constante

$$\varepsilon_f = \mu(T = 0) \tag{17}$$

appelée énergie de Fermi.

Revenons à présent aux électrons libres dans notre naine blanche ... En tant que fermions, ils sont décrits par la distribution de Fermi-Dirac, dont la courbe représentative est indiquée ci-dessous



(18)

Si la densité est faible, le gaz n'est que faiblement dégénéré, le nombre d'électrons est très faible devant le nombre de micro-cellules à leur disposition. Dans le cas de densité extrême, ils sont au contraire forcés de "s'empiler" à raison de $n_i/g_i = 1$ par micro-cellule. Dans cet état complètement dégénéré, les relations (9) deviennent donc

$$N = \sum_i g_i \qquad \text{et} \qquad E = \sum_i g_i \varepsilon_i \tag{19}$$

En remplaçant la somme discrète par une somme continue (intégrale) sur tout l'espace des phases, pondérée par la densité de probabilité, il vient à l'équilibre

$$N = 2 \times \int\int d\overrightarrow{r} d\overrightarrow{p} \frac{f(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p})}{\Delta\overrightarrow{r}\Delta\overrightarrow{p}} \tag{20}$$

Le facteur 2 est un raffinement qui vient signaler qu'en fait chaque micro-cellule peut être occupé par deux électrons de spin opposés mais pas plus ! Le facteur $\Delta\overrightarrow{r}\Delta\overrightarrow{p}$ représente le volume minimal d'une micro-cellule de l'espace des phases dont l'inverse est simplement le facteur de dégénérescence. A ce stade, le principe d'incertitude de Heisenberg vient nous renseigner sur le fait que

$$\Delta x.\Delta p_x \sim \Delta y.\Delta p_y \sim \Delta z.\Delta p_z \sim h \tag{21}$$

il convient donc de choisir $\Delta\overrightarrow{r}\Delta\overrightarrow{p} = h^3$.

Dans l'état complètement dégénéré, tant que $\varepsilon < \varepsilon_f$, on est sur de trouver à chaque fois une particule dans chaque micro-cellule, ainsi

$$f\left(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon < \varepsilon_f \\ \\ 0 & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon_f \end{cases} \tag{22}$$

l'intégration (20) peut donc se faire en deux temps : sur les positions d'abord on trouve le volume total occupé par le gaz d'électrons, soit le volume V de la naine blanche, sur les impulsions ensuite où l'on passe en coordonnées sphériques pour avoir

$$N = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_f} 4\pi p^2 dp \tag{23}$$

La borne supérieure de l'intégrale se comprend aisément : comme l'énergie est limitée à ε_f et que pour une particule libre $\epsilon = p^2/2m$, le module de l'impulsion est limité à l'impulsion de Fermi

$$p_f = \sqrt{2m\varepsilon_f} \tag{24}$$

Comme tout le monde sait intégrer un carré, la relation (23) devient

$$N = \frac{8\pi V\, p_f^3}{3h^3} \tag{25}$$

Ce petit calcul nous permet d'obtenir sur un plateau, l'expression de l'impulsion de Fermi (où l'on a introduit comme habituellement en mécanique quantique $\hbar = h/2\pi$)

$$p_f = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} \tag{26}$$

Nous sommes à présent en mesure de détailler l'idée de Fowler qui consiste à remplacer la pression cinétique à l'ouvrage sur la séquence principale, par la pression de dégénérescence quantique qu'il suppose à l'œuvre pour équilibrer les naines blanches.

3.2.3 Le calcul de Fowler

En considérant d'éventuelles variations quasi statiques du volume, le second principe de la thermodynamique s'écrit

$$dE = TdS - PdV \tag{27}$$

Dans notre état complètement dégénéré et si toutes les particules sont indiscernables, il n'existe qu'une seule façon de répartir les N particules dans toutes les micro-cellules, ainsi $\Omega = 1$: l'entropie est nulle et ne varie pas [3]. Sous cette hypothèse, la relation (27) nous indique donc que l'énergie ne dépend que du volume et que la pression du gaz est simplement donnée par

$$P = -\frac{dE}{dV} \tag{29}$$

L'énergie du système est accessible par une sommation discrète (cf. (9)). Un passage à la limite continue et la prise en compte de la dégénérescence complète donne pour l'énergie (via un raisonnement en tout points identiques à celui fait pour le calcul de N)

$$E = \frac{V}{\pi^2\,\hbar^3}\int_0^{p_f} \varepsilon\, p^2 dp \tag{30}$$

Fowler nota que $\varepsilon = p^2/2m$ et obtint

$$E = \frac{V}{2m\pi^2\,\hbar^3}\int_0^{p_f} p^4 dp \qquad \text{soit} \quad E = \frac{V\,p_f^5}{10m\pi^2\,\hbar^3} \tag{31}$$

en remplaçant p_f par sa valeur calculée précédemment (formule (26)), on trouve finalement

$$E = \left(\frac{243\pi^4}{1000}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{m}\,N^{5/3}V^{-2/3} \tag{32}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la relation (29) pour obtenir la pression

$$P = \frac{\left(9\pi^4\right)^{1/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m}\,\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \tag{33}$$

En utilisant des calculs que nous avions déjà oubliés reliant N et M (cf. (8)), et l'hypothèse de sphéricité pour le calcul du volume, on parvient finalement à

$$P = \frac{\hbar^2}{15m\,\pi^{1/3}}\left(\frac{9M}{8m_p}\right)^{5/3}\frac{1}{R^5} \tag{34}$$

Si une naine blanche est le résultat de l'équilibre entre la pression de dégénérescence quantique des électrons et sa pression gravitationnelle, en se souvenant de (2) on trouve

$$\frac{\hbar^2}{15m\,\pi^{1/3}}\left(\frac{9M}{8m_p}\right)^{5/3}\frac{1}{R^5} = \frac{GM^2}{4\pi R^4} \tag{35}$$

soit

$$RM^{1/3} = \frac{9}{40}\frac{\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar^2}{G\,m\,m_p^{5/3}} \simeq 5.37\times 10^{16}\ \text{m.kg}^{1/3} \tag{36}$$

Pour quelques masses solaires, on trouve bien une naine blanche dont le rayon est de l'ordre de celui de la Terre, tout ceci conformément aux observations de Sirius B, et des nouvelles naines blanches observées depuis.

Le résultat de Fowler, poussa Eddington au raisonnement suivant : Quelles que soient leurs masses, les étoiles termineront toutes leur existence dans un état de naine blanche vérifiant la relation (36) obtenue par Fowler. En rayonnant leur énergie dans l'espace, leur température diminuera au fil du temps, de blanche la naine deviendra progressivement grise, puis noire.

Lorsque Chandrasekhar s'embarque sur ce bateau à destination de l'Angleterre, avec dans son cartable l'article de Fowler et dans son esprit les conseils de Sommerfeld, l'espoir d'Edddington va voler en poussière, tout au moins en partie ...

3. Cette hypothèse qui peut paraître drastique, revient en fait à supposer que la température est négligeable devant la température de Fermi θ_f du système. Par définition, nous avons

$$\theta_f = \frac{\varepsilon_f}{k} = \frac{\hbar^2}{2mkR^2}\left(\frac{9\Pi M}{9m_p}\right)^{2/3} \tag{28}$$

qui vaut presque 4 milliard de Kelvins, face à la poussive centaine de millions de Kelvins du centre de la naine blanche

3.2.4 L'intervention de Chandrasekhar

En y regardant de loin bien peu de choses changent dans le nouveau calcul du jeune indien. En fait, tant dans ses principes que dans ses résultats, il est révolutionnaire !

L'idée de départ de Chandrasekhar vient du principe d'incertitude d'Heisenberg : Si l'on "connaît" bien la position d'une particule quantique, on "connaît" moins bien sa vitesse et réciproquement. La conclusion est donc claire : si, comme le prouve le calcul de Fowler, les électrons sont à ce point confinés (et donc localisés) que leur dégénérescence provoque une pression suffisante pour empêcher l'effondrement gravitationnel, alors ils sont animés d'une très grande vitesse [4] ... Ainsi, suivant le conseil de Sommerfeld, il faut obligatoirement remplacer la mécanique de Newton par celle d'Einstein.

La conséquence technique est relativement simple : selon les lois de la relativité restreinte, il existe une vitesse infranchissable c, celle de la lumière dans le vide, et à toute masse est associée un énergie via la célèbre relation $\epsilon_o = mc^2$. Ainsi pour des électrons relativistes, l'énergie n'est plus simplement seulement donnée par la relation classique utilisée par Fowler, mais doit être remplacée par la relation d'Einstein [5]

$$\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{37}$$

Reprenons dans ces conditions le calcul de l'énergie, la relation (30) devient

$$E = \frac{V}{\pi^2\,\hbar^3}\int_0^{p_f} \left(p^2c^2 + m^2c^4\right)^{1/2}\; p^2dp \tag{38}$$

en posant $x = p/mc$, et donc $x_f = p_f/mc$, l'énergie devient

$$E = \frac{V\,m^4\,c^5}{\pi^2\,\hbar^3}\int_0^{x_f} x^2\sqrt{x^2+1}\;dx \tag{39}$$

usant de sa légendaire astuce, et toujours sur son bateau, Chandrasekhar vint à bout de cette intégrale et obtint

$$E = \frac{V\,m^4\,c^5}{8\pi^2\,\hbar^3}\left[2x_f(x_f^2+1)^{3/2} - x_f(x_f^2+1)^{1/2} - \operatorname{arg\,sinh} x_f\right] \tag{40}$$

Il constate donc qu'un calcul exact de la pression va devenir farouchement compliqué, il tente donc la limite ultra-relativiste, c'est-à-dire la situation dans laquelle [6]

$$p_f \gg mc \quad \text{soit} \quad x_f \gg 1 \tag{41}$$

un développement limité à la portée de tout navigateur lui permet d'obtenir

$$\frac{\left[2x_f(x_f^2+1)^{3/2} - x_f(x_f^2+1)^{1/2} - \operatorname{arg\,sinh} x_f\right]}{8} \underset{x_f\,\to\,+\infty}{\sim} \frac{x_f^4+x_f^2}{4} - \frac{\ln 2x_f}{8} + \frac{1}{32}\left(1 - x_f^{-2} + O(x_f^{-4})\right) \tag{42}$$

en négligeant le terme logarithmique et les suivants, il obtient dans le cas ultra-relativiste

$$E = \frac{V\,m^4\,c^5x_f^4}{4\pi^2\,\hbar^3}\left[1 + \frac{1}{x_f^2}\right] \tag{43}$$

en reportant la valeur inchangée de l'impulsion de Fermi (cf. relation (26)), il vient

$$E = \frac{1}{4\pi^2}\left[\hbar c\left(3\pi^2N\right)^{4/3}V^{-1/3} + \frac{m^2c^3}{\hbar}\left(3\pi^2N\right)^{2/3}V^{1/3}\right] \tag{44}$$

et le calcul de la pression s'en déduit directement en dérivant par rapport à V

$$P = \frac{1}{4}\left[\hbar c\left(3\pi^2\right)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} - \frac{2m^2c^3}{\hbar\left(3\pi^2\right)^{1/3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\right] \tag{45}$$

en exprimant comme dans le cas classique N en fonction de M (relation (8)) et V en fonction de R, pour une naine sphérique, quelques manipulations fournissent

$$P = \frac{\hbar c}{12\pi^{2/3}}\left(\frac{9M}{8m_p}\right)^{4/3}\frac{1}{R^4}\left[1 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\frac{R^2}{\left(9\pi M/8m_p\right)^{2/3}}\right] \tag{46}$$

4. un rapide calcul d'ordre de grandeur donne $v \simeq c/3$

5. L'impulsion et l'énergie cinétique deviennent $\overrightarrow{p} = \gamma m\overrightarrow{v}$ et $\epsilon = \gamma mc^2$ où $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz. En combinant le carré de ces deux relations on trouve la relation d'Einstein. Si $v \ll c$, on retrouve $\epsilon = p^2/2m$.

6. Si $v \simeq c$, alors $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} \gg 1$, et comme $mv \simeq mc$ on en déduit que $p = \gamma mv \gg mc$ et donc $x = p/mc \gg 1$.

en cherchant l'équilibre avec la pression gravitationnelle, on trouve à présent une relation de la forme

$$\frac{R}{R_c} = \left(\frac{M}{M_c}\right)^{1/3} \left[1 - \left(\frac{M}{M_c}\right)^{2/3}\right]^{1/2} \tag{47}$$

où l'on a introduit la masse et le rayon de Chandrasekhar

$$M_c = \sqrt{3\pi}\left(\frac{3}{8m_p}\right)^2 \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \quad \text{et} \quad R_c = \frac{\hbar}{mc}\pi^{1/3}\left(\frac{9M_c}{8m_p}\right)^{1/3} \tag{48}$$

On aboutit donc à la conclusion suivante : Pour que la naine blanche puisse exister (ce qui revient par exemple à pouvoir définir une valeur réelle pour le rayon ...), il faut que la masse de l'étoile soit plus petite que la masse de Chandrasekhar. Au delà, la pression de dégénérescence quantique des électrons n'est plus suffisante pour contenir la pression gravitationnelle. Un calcul explicite de cette limite donne ici $M_c = 0,78M_\odot$ et $R_c = 5755$ km. Une théorie plus précise mais plus complexe [7] donne en fait $M_c = 1.54M_\odot$, c'est-à-dire le double de notre valeur.

Cette limite supérieure pour la masse d'une naine blanche a été, depuis le calcul nautique de Chandrasekhar, vérifiée aussi bien par des observations que par des résolutions numériques plus complètes du problème. Jusqu'à sa mort en 1944, Eddington lutta contre le fait que la gravité puisse l'emporter pour des étoiles massives. Dans un premier temps les faits lui donnèrent raison : Pour des étoiles plus massives que M_c la pression gravitationnelle finit par faire fusionner les électrons et les protons en neutrons dont la pression de dégénérescence est supérieure à celle des électrons. On forme alors une étoile à neutron dont le diamètre n'est plus que de quelques dizaines de kilomètres pour environ une masse solaire. Des calculs semblables, mais en relativité générale cette fois-ci, permettent de constater qu'une étoile à neutron de plus de 3 masses solaires doit s'effondrer. Rien alors ne peut plus arrêter la gravité, l'étoile devient dans ces conditions ce qu'il est convenu d'appeler un trou noir. C'est surtout de ce genre de chose dont Eddington avait horreur. Pourtant, dans la dernière moitié du XX^{ème}siècle, on observa beaucoup de naines blanches mais jamais une dont la masse dépasse la limite autorisée, de nombreuses étoiles à neutrons, mais toujours dans le bon domaine de masse. On observe aussi, indirectement, de nombreux candidats trous noirs et dans tous les cas l'objet mystérieux à toujours une masse supérieure à $3M_\odot$.

La carrière de S. Chandrasekhar, si glorieusement débutée, se poursuivit jusqu'à la toute fin du XX^{ème} siècle, après la publication de plus de 1500 articles dans de très nombreux domaines de l'astrophysique qu'il a su éclairer de son génie. Il reçut en 1984 le prix Nobel de physique pour ses travaux sur les naines blanches et ce fameux exposant 4/3 dans la densité qui vient limiter leurs masses.

Constante utilisées

Rayon du Soleil	$R_\odot = 6.96 \times 10^8 m$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1.99 \times 10^{30} kg$
Masse de l'électron	$m = 9.1 \times 10^{-31} kg$
Masse du proton	$m_p = 1.67 \times 10^{-27} kg$
Constante de Boltzmann	$k = 1.38 \times 10^{-23} J.K^{-1}$
Constante de Planck	$\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34} J.s$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2.9 \times 10^8 m.s^{-1}$
Constante de la gravitation	$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-1}$

Glossaire

— **Méthode des parallaxes** : A cause du mouvement de la Terre autour du Soleil, le point de vue qui nous est offert pour observer les étoiles varie d'une saison à l'autre. La variation périodique de la position d'une étoile induite par ce mouvement, permet par un raisonnement trigonométrique très simple de déterminer la distance de cette étoile.

— **Périastre** : Dans le cas d'une énergie totale négative (système lié), la solution du problème gravitationnel des 2 corps est une ellipse. Le périastre et l'apoastre correspondent respectivement à la plus petite et à la plus grande distance séparant les deux corps.

7. Le calcul présenté ici revient à considérer que la densité est constante. L'existence d'une masse limite provient de l'équation d'état $P = cste.\rho^{4/3}$ dite polytropique d'indice 4/3. Pour trouver la "bonne" valeur de la masse limite, il "suffit" de combiner les deux équations d'équilibres

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho \text{ et } \frac{dP}{dr} = -G\frac{M(r)\,\rho}{r^2} \tag{49}$$

On montre alors que ρ s'annule en un rayon R_c, on en déduit la masse limite

$$M_c = \int_0^{R_c} 4\pi r^2 \rho(r)\, dr \tag{50}$$

Exemple de sujets - Epreuve d'ADS Physique, Filière MP

Dossier n°10 : Fin de vie des étoiles de faible masse

Documents : Ce dossier comportait un texte à vocation pédagogique sur la fin de vie des étoiles de faible masse.

Sujet : Dans votre exposé, qui durera environ 15 minutes et qui synthétisera le contenu du dossier, vous chercherez à montrer comment vos connaissances en physique vous permettent de comprendre et d'expliquer les éléments présentés dans le dossier.

On veillera lorsque cela est possible à justifier les résultats numériques ou théoriques annoncés et à ne pas se contenter de répéter ou de paraphraser le texte.

Commentaires des examinateurs : La difficulté principale de ce texte résidait dans sa longueur et le niveau de détails techniques présentés, qui ont poussé de nombreux candidats à dérouler une paraphrase linéaire et pauvre du texte. Par conséquent, beaucoup d'exposés ont été trop longs ou trop précipités, par excès d'exhaustivité.

Il fallait au contraire démontrer un esprit de synthèse, qui passe nécessairement par une sélection de l'information et par sa réorganisation critique.

Le texte offrait un plan assez classique, permettant de comprendre les mécanismes responsables de la stabilisation des étoiles en fin de vie.

Dans une première partie, on présentait un résumé standard de l'idée générale expliquant la stabilité des étoiles sur la séquence principale, issue de l'équilibre entre pression de radiation et gravitation. De nombreux candidats ont perdu du temps en ne comprenant pas que le modèle proposé dans le texte reposait sur des arguments qualitatifs et des hypothèses physiques qui, bien qu'assez radicales, permettaient de comprendre les mécanismes mis en jeu.

Ensuite, venait le corps du texte, c'est-à-dire l'explication de l'état dans lequel les étoiles terminent leur vie. Par manque de temps ou par la faute d'une lecture trop rapide, certains candidats ont introduit des contresens fâcheux sur la physique de la découverte de Sirius B. Dans un texte qui présentait de nombreux développements techniques, les aspects physiques ne sont pas à négliger. Cette découverte fut centrale car elle menait les astrophysiciens à contempler l'existence de corps dont les densités défiaient toutes les lois de la physique classique alors connues.

C'était donc la motivation principale pour introduire la notion de pression quantique. La plupart des candidats ont habilement reproduit les développements techniques du texte sur ce sujet, même si certains ont perdu trop de temps sur le dénombrement ou les étapes intermédiaires triviales. On rappelle que l'épreuve d'ADS doit être l'occasion de démontrer un esprit de synthèse plus que de détail. Les détails font souvent l'objet de questions poussées lors de la séance de discussion qui suit l'exposé des candidats. Ainsi, plutôt que de suivre les développements calculatoires du texte de

manière linéaire, il eût été plus intéressant de partir de la notion d'état dégénéré, explicitée dans le texte, pour mettre en ordre les calculs, puis de présenter en parallèle les approches de Fowler et Chandrasekhar afin de mettre en lumière la contribution essentielle de ce dernier et de discuter les hypothèses de physique. L'approche séquentielle adoptée par la plupart des candidats ne pouvaient que mener à des redites inutiles. Les calculs d'intégrales élémentaires pouvaient avantageusement être laissés de côté dans l'exposé pour libérer du temps d'analyse.

Pour conclure, il faut insister sur la nécessité pour les candidats de réaliser une synthèse critique du dossier. Ici, les étapes de modélisation étaient quasiment systématiquement données. Encore fallait-il produire un travail d'analyse critique et de mise en forme, plutôt qu'une paraphrase linéaire du texte. Le réinvestissement de connaissances personnelles sur le sujet et sur le monde physique afin de resituer le dossier dans un contexte plus large est également apprécié, en particulier lors de la séquence de discussion. Cette dernière ne peut simplement pallier un exposé défaillant ou mal construit.