Travail demandé

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Le texte est consacré à la fonction zêta de Riemann et à la nature arithmétique de ses valeurs aux entiers. Il présente notamment des résultats relatifs aux valeurs de $\zeta(s)$aux entiers pairs et impairs, ainsi que plusieurs théorèmes d'irrationalité.

L'exposé pourra notamment aborder les points suivants :

- la définition de la fonction zêta de Riemann ;
- les valeurs de $\zeta(s)$aux entiers ;
- le théorème d'Euler sur les valeurs $\zeta(2n)$;
- le problème de la nature arithmétique des valeurs impaires ;
- le théorème d'Apéry sur l'irrationalité de $\zeta(3)$;
- la méthode de Beukers ;
- les perspectives ouvertes concernant les valeurs $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, etc.

Les développements relatifs au prolongement analytique de la fonction zêta, aux polylogarithmes ou aux résultats les plus récents pourront être admis ou simplement évoqués.

Remarques particulières

1. L'exposé n'a pas vocation à couvrir l'intégralité du document.
2. Une attention particulière pourra être portée au théorème d'Apéry et à la démonstration de Beukers de l'irrationalité de $\zeta(3)$.
3. Le candidat pourra expliquer en quoi les résultats connus pour les valeurs paires de la fonction zêta contrastent avec les difficultés rencontrées pour les valeurs impaires.
4. Les démonstrations techniques les plus longues pourront être remplacées par une présentation des idées principales.

Remarques générales

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs…) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.
2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.
3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examinateur.

Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann

1 Introduction

Nous présentons quelques uns des résultats connus sur la nature arithmétique des valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann, définie pour tout réel $s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \, . \tag{1}$$

Cette série est divergente en toutes les autres valeurs réelles de s, mais nous indiquerons au §2 comment prolonger ζ de façon unique non seulement à $\mathbb{R}$ mais aussi à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$: ceci nous permet de montrer au §3 que les nombres $\zeta(n)$ pour n entier ≤ 0 sont tous rationnels. Les §§4-5 sont indépendants et sont consacrés aux résultats suivants :

i) pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$ est transcendant, c'est-à-dire n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels. Cela résulte du théorème de Lindemann "le nombre π est transcendant" (1882), que nous montrerons également ;

ii) beaucoup plus récemment, en 1978, Apéry a montré le premier résultat aux entiers impairs positifs : le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel ;

iii) une infinité des nombres $\zeta(2n+1)$ (n entier ≥ 1) sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, donc irrationnels ([Riv] et [B-R], 2000).

Zudilin a montré qu'au moins un des nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ est irrationnel, mais la démonstration, sans être difficile, est trop technique pour que nous la donnions ici. On n'en sait guère plus sur les nombres $\zeta(2n+1)$, alors que l'on a la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Les nombres*

$$\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots$$

sont algébriquement indépendants, c'est-à-dire qu'aucun polynôme rationnel non nul en un nombre quelconque de variables n'est annulé par ces nombres.

L'indépendance linéaire correspond aux seuls polynômes du type $P(\underline{X}) = c_0 + \sum_{j \geq 1} c_j X_j$ (où les rationnels c_j sont nuls sauf un nombre fini quelconque d'entre eux), ce qui donne une idée du chemin encore à parcourir. Les références données dans le texte sont de difficultés

très variables, allant d'ouvrages généraux à des articles de recherche. Dans la mesure du possible, nous avons essayé qu'elles soient accessibles, en particulier sur le réseau. Le lecteur pourra donc se faire une idée par lui-même de ces éventuelles difficultés. Les quelques notions d'analyse complexe utilisées (fonction méromorphe, prolongement analytique au §2, formule de Cauchy au §5, etc) ne sont pas essentielles à la compréhension du texte et peuvent être trouvées dans [A-LF], chapitre VIII. Enfin, lorsqu'il apparaît dans ce texte, le mot "élémentaire" n'est pas forcément synonyme de "simple et facile" !

2 Le prolongement analytique de ζ

La fonction zêta a été considérée bien avant Riemann par Euler qui a par exemple montré formellement l'identité

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}\,, \tag{2}$$

valable en fait pour $s > 1$. Euler a ainsi déduit de la divergence de $\zeta(1)$ une preuve analytique de l'existence d'une infinité de nombres premiers. Pour explorer davantage ce lien entre nombres premiers et analyse, Riemann [Rie] a été le premier à considérer $\zeta(s)$ comme une fonction de la variable complexe s et l'a prolongée de façon unique en une fonction, toujours notée ζ, méromorphe[1] sur $\mathbb{C}$, avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. Il a aussi montré que ce prolongement vérifie l'équation fonctionnelle suivante, déjà devinée par Euler :

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s)\,. \tag{3}$$

Riemann a ainsi pu donner une formule, assez compliquée, liant les zéros de ζ à la fonction $\pi(x) = \text{card}\,\{p \text{ premier} \,|\, p \leq x\}$. Le succès de cette approche "complexe" arrivera en 1896 lorsque Hadamard et de la Vallée-Poussin prouvent indépendamment que ζ ne s'annule pas sur la droite verticale $\text{Re}(s) = 1$ et en déduisent le théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)} \quad \left(\sim \frac{x}{\log(x)}\right) \quad \text{quand } x \to +\infty\,. \tag{4}$$

L'estimation (4) est même équivalente à la non-annulation de ζ sur $\text{Re}(s) = 1$. Il n'est donc pas surprenant que l'hypothèse de Riemann "tous les zéros non triviaux[2] de ζ sont sur la droite verticale $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$" donnerait une version très précise de (4) si elle était prouvée :

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)} = \mathrm{O}\left(\sqrt{x}\,\log(x)\right) \quad \text{quand } x \to +\infty\,. \tag{5}$$

[1] Une fonction méromorphe est une fonction $f(s)$ de la variable complexe s dérivable partout sauf en des pôles ; elle a un pôle simple en s_0 de résidu ρ si $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)f(s) = \rho$. Contrairement aux fonctions d'une variable réelle, s'il existe, le prolongement est unique.

[2] c'est-à-dire autres que les zéros aux entiers négatifs pairs ; par ailleurs, on sait que l'hypothèse de Riemann est en fait équivalente à (5)

La fonction Γ qui apparaît dans (3) est la fonction Gamma d'Euler définie sur $\mathrm{Re}(s) > 0$ par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t$: l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, que l'on prouve par intégration par parties, montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$ et prolonge Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples aux entiers $-n \leq 0$, de résidu $(-1)^n/n!$. On pourra consulter [E-L], p. 114, pour plus de détails sur Γ.

3 Valeurs de ζ aux entiers

L'équation fonctionnelle permet de déterminer certaines valeurs de ζ aux entiers. En effet, la fonction Γ ayant des pôle simple aux entiers négatifs, (3) évaluée en $s = -2n < 0$ implique que pour tout entier $n \geq 1$, $\zeta(-2n) = 0$, puisque $\zeta(1-s) = \zeta(2n+1)$ est bien défini. Le cas $n = 0$ doit être traité à part puisque $\zeta(1-s)$ et $\Gamma(s)$ ont chacune un pôle simple de résidu -1, respectivement 1, en $s = 0$: en multipliant (3) par s, puis en faisant tendre s vers 0, on obtient $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Pour aborder le cas des entiers impairs négatifs, définissons la suite des nombres de Bernoulli $(B_n)_{n\geq 0}$ au moyen de la série génératrice :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n.$$

On vérifie que $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, B_{2n} est rationnel et $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$.

Théorème 1. *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$\zeta(-n) = (-1)^n \,\frac{B_{n+1}}{n+1}\,. \tag{6}$$

Le cas n pair est déjà traité ci-dessus. À défaut d'une preuve rigoureuse de ce théorème, que l'on trouvera dans [Co], voici comment l'intuition remarquable d'Euler lui permettait de "montrer" (6). Notons que pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^s$, ce qui au passage fournit le prolongement analytique de ζ au demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. On peut alors sommer la série divergente $\zeta(-n)$ par la méthode d'Abel :

$$\begin{aligned}
(1-2^{n+1})\zeta(-n) \quad \text{“=”} \quad & \lim_{x\to -1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \left(\frac{x}{1-x}\right)\Bigg|_{x=-1} \\
= \quad & (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Bigg|_{z=0} \qquad (x = -e^{-z}) \\
= \quad & (-1)^n (1-2^{n+1})\frac{B_{n+1}}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Lorsque $s = 2n$, on déduit de (6) et de l'équation fonctionnelle la célèbre identité d'Euler (voir [Du] pour l'histoire de cette découverte) :

Théorème 2. *Pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!}\, \pi^{2n}\,. \tag{7}$$

En revanche, il n'existe aucune expression aussi simple pour les nombres $\zeta(2n+1)$ (n entier ≥ 1), l'équation fonctionnelle étant muette dans ce cas. On peut toutefois citer une très belle formule de Ramanujan :

$$(-\beta)^{-n}\left(\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k}-1}\right)= \\ \alpha^{-n}\left(\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k}-1}\right)+2^{2n}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{B_{2k}B_{2n+2-2k}}{(2k)!(2n+2-2k)!}\alpha^{n+1-k}\beta^{k}\ ,$$

où les complexes α et β sont de parties réelles >0 et tels que $\alpha\beta=\pi^2$.

4 L'irrationalité de $\zeta(3)$

Déterminer la nature arithmétique des nombres "naturels" tels que π est un problème en général difficile : la preuve de l'irrationalité de π est due à Lambert en 1766 et celle de sa transcendance, que nous montrerons[3] au §5, est due à Lindemann en 1882. On en déduit grâce à la formule (7) que pour tout entier $n\geq 1$, $\zeta(2n)$ est transcendant. Malheureusement, à ce jour, personne n'a réussi à exploiter la formule de Ramanujan et aucun résultat arithmétique n'était connu sur les nombres $\zeta(2n+1)$ jusqu'à l'annonce faite en 1978 par Apéry du résultat suivant.

Théorème 3. *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

Bien qu'élémentaire, la preuve d'Apéry est relativement compliquée[4]. Il en existe un certain nombre de variantes dont la plus simple, due à Beukers, est celle que nous allons rapidement exposer. On pourra consulter [Fi] pour un exposé exhaustif de toutes les preuves connues. On note dans toute la suite $d_n=\text{p.p.c.m}\{1,2,\dots,n\}$: du théorème des nombres premiers (4) et de la formule $d_n=\prod_{p\ 1\text{er}}p^{[\log(n)/\log(p)]}$, on déduit que $d_n^{1/n}\to e$. Nous aurons également besoin de la suite des polynômes de Legendre $P_n(X)=\frac{1}{n!}(X^n(1-X)^n)^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n+j}{n}X^j$. L'irrationalité de $\zeta(3)$ va découler de la comparaison de deux expressions différentes de l'intégrale suivante, définie pour tout entier $n\geq 0$:

$$\mathbf{J}_n=-\int_0^1\int_0^1 P_n(x)P_n(y)\frac{\log(xy)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

Proposition 1. *i) Il existe deux suites $(\mathbf{A}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ telles que pour tout $n\geq 0$, $\mathbf{A}_n\in\mathbb{Z}$, $d_n^3\,\mathbf{B}_n\in\mathbb{Z}$ et $\mathbf{J}_n=2\mathbf{A}_n\zeta(3)-\mathbf{B}_n$.*

ii) Pour tout $n\geq 0$, on a

$$\mathbf{J}_n=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{x^n(1-x)^ny^n(1-y)^nz^n(1-z)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\neq 0\ . \tag{8}$$

[3] Voir [E-L] pour une démonstration plus près de l'originale.

[4] mais elle est très clairement exposée dans [vdP]

Démonstration. *i)* Écrivons $P_n(x)P_n(y)$ en séparant les termes $(xy)^j$ et x^iy^j, $i \neq j$, de sorte que

$$\mathbf{J}_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{n}^2 \mathbf{J}_n^j + \sum_{\substack{0\le i,j\le n \\ i\neq j}}^{n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n+i}{n}\binom{n+j}{n} \mathbf{J}_n^{i,j} ,$$

avec $\mathbf{J}_n^j = -\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{(xy)^j}{1-xy}\log(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\zeta(3) - 2\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^3}$ et

$$\mathbf{J}_n^{i,j} = -\int_0^1\int_0^1 \frac{x^iy^j}{1-xy}\log(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{|j-i|}\sum_{k=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)}\frac{1}{k^2} \qquad (i\neq j) .$$

Posons maintenant $\mathbf{A}_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{n}^2$ et

$$\mathbf{B}_n = 2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{n}^2\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^3} - 2\sum_{\substack{0\le i,j\le n \\ i\neq j}}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{|j-i|}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n+i}{n}\binom{n+j}{n}\sum_{k=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)}\frac{1}{k^2} .$$

Clairement $\mathbf{A}_n$ et $d_n^3\mathbf{B}_n$ sont entiers et $\mathbf{J}_n = 2\mathbf{A}_n\zeta(3) - \mathbf{B}_n$.

ii) Remarquons que $\dfrac{\log(xy)}{1-xy} = -\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}z$, d'où

$$\mathbf{J}_n = \int_{[0,1]^3}\frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

Intégrons n fois par parties par rapport à x :

$$\mathbf{J}_n = \int_{[0,1]^3}\frac{x^n(1-x)^ny^nP_n(y)z^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

Effectuons alors le changement de variable $z = \dfrac{1-w}{1-(1-xy)w}$:

$$\mathbf{J}_n = \int_{[0,1]^3}\frac{(1-x)^nP_n(y)(1-w)^n}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w .$$

Enfin, n intégrations par parties successives par rapport à y donne (8).

Démonstration du théorème 3 . De la proposition 1 résulte l'existence d'entiers $\mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_n$ tels que $\mathbf{a}_n\zeta(3)-\mathbf{b}_n = d_n^3\mathbf{J}_n \neq 0$. Pour montrer que $\zeta(3)\notin\mathbb{Q}$, il nous suffit de montrer que $d_n^3\mathbf{J}_n$ tend vers 0. En effet, si on avait $\zeta(3)=p/q\in\mathbb{Q}$, l'entier positif $|p\mathbf{a}_n - q\mathbf{b}_n| = |qd_n^3\mathbf{J}_n|$ serait non nul et <1 pour n assez grand, ce qui est impossible. On vérifie alors que

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathbf{J}_n|^{1/n} = \sup_{(x,y,z)\in[0,1]^3}\left(\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z}\right) = (\sqrt{2}-1)^4 < e^{-3}\,,$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}|d_n^3\mathbf{J}_n| = 0$.

A titre de curiosité et afin d'illustrer la diversité des méthodes conduisant au théorème d'Apéry, notons qu'une autre démonstration en a été donnée par Nesterenko grâce à une étude directe de la série ci-dessous. Nous verrons au paragraphe suivant l'intérêt d'une telle représentation.

Proposition 2. *Pour tout entier $n\geq 0$, on a*

$$\mathbf{J}_n = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{(k-1)^2(k-2)^2\cdots(k-n)^2}{k^2(k+1)^2\cdots(k+n)^2}\right). \tag{9}$$

Démonstration. Comme nous n'avons pas besoin de cette expression, nous ne justifions pas les diverses étapes analytiques. Remarquons que $\dfrac{\log(xy)}{1-xy} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{(xy)^t}{1-xy}\right)\Big|_{t=0}$ et donc que $\mathbf{J}_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^1 x^{k+t-1}P_n(x)\mathrm{d}x\right)^2\Big|_{t=0}$. En intégrant n fois par parties, on vérifie que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{k+t-1}P_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{(k+t-1)\cdots(k+t-n)}{n!}\int_0^1 x^{k+t-1}(1-x)^n\mathrm{d}x\\ &= \frac{(k+t-1)\cdots(k+t-n)}{(k+t)(k+t+1)\cdots(k+t+n)}\,.\end{aligned}$$

D'où $\mathbf{J}_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(k+t-1)^2\cdots(k+t-n)^2}{(k+t)^2(k+t+1)^2\cdots(k+t+n)^2}\right)\Big|_{t=0}$, c'est-à-dire (9) sous une forme déguisée.

5 Irrationalité d'une infinité des $\zeta(2n+1)$

La démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ n'a pas été généralisée aux autres valeurs $\zeta(2n+1)$ pour $n\geq 2$, en particulier en raison de l'apparition quasi-systématique des $\zeta(2n)$, qui parasitent les résultats[5]. Ce phénomène a récemment pu être contré par l'emploi de séries similaires à (9), ce qui a permis de montrer le théorème suivant.

[5]Par exemple, le théorème 4 est parfaitement trivial si on rajoute les $\zeta(2n)$, $1\leq n\leq a/2$, puisqu'on a alors automatiquement $\delta(a)\geq[a/2]+1$, en vertu du théorème de Lindemann.

Théorème 4. *Soit a un entier impair ≥ 3. La dimension $\delta(a)$ de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, ..., $\zeta(a)$ est plus grande que $\frac{1}{3}\log(a)$. En particulier, une infinité des nombres $\zeta(2n+1)$ (n entier ≥ 1) sont irrationnels.*

Nous montrerons une version légèrement différente, où $1/3$ est remplacé par une constante $c(a)$ qui tend vers $1/(1+\log(2))$ quand $a \to +\infty$. Si l'on estime que les $\zeta(2n+1)$ sont les parasites, on montre alors sans plus de travail le théorème de Lindemann :

Théorème 5. *Le nombre π est transcendant. En conséquence, les nombres $\zeta(2n)$ (n entier ≥ 1) sont tous transcendants.*

Nous aurons besoin des fonctions polylogarithmes Li_s définies par

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$$

pour s entier ≥ 1, z complexe tels que $|z| \leq 1$ et $(s,z) \neq (1,1)$. En particulier, $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ diverge en $z=1$ et $\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$ pour $s \geq 2$. Étant donnés des entiers $a \geq 2$, $n \geq 0$, toute fraction rationnelle $\mathbf{R}_{n,a}(X) = \dfrac{\mathbf{A}_{n,a}(X)}{X^a(X+1)^a \cdots (X+n)^a} \in \mathbb{Q}(X)$ avec $\deg(\mathbf{A}_{n,a}) \leq a(n+1)-2$ donne naissance à une série $\mathbf{S}_{n,a}(z)$ qui peut s'écrire comme combinaison linéaire polynômiale de polylogarithmes :

$$\mathbf{S}_{n,a}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}_{n,a}(k) z^{-k} = \mathbf{P}_{0,n,a}(z) + \sum_{\ell=1}^{a} \mathbf{P}_{\ell,n,a}(z)\mathrm{Li}_\ell(1/z)\ .$$

L'hypothèse sur $\deg(\mathbf{A}_{n,a})$ implique automatiquement que $\mathbf{P}_{1,n,a}(1) = 0$. Nous allons voir que l'on peut choisir $\mathbf{R}_{n,a}(X)$ telle que $\mathbf{P}_{\ell,n,a}(1) = 0$ pour ℓ pair, resp. impair : on construit ainsi une suite de combinaisons linéaires $\mathbf{S}_{n,a}(1)$ uniquement en 1 et les ζ impairs, resp. pairs, à laquelle on applique le critère d'indépendance linéaire suivant, dû à Nesterenko. On pourra en trouver une démonstration élémentaire dans [Co].

Proposition 3. *Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ des réels. Supposons qu'il existe N suites d'entiers $(\mathbf{p}_{j,n})_{n\geq 0}$ et deux réels $\alpha > 0$, $\beta > 1$ tels que $\lim_{n\to\infty} |\mathbf{p}_{1,n}\xi_1 + \cdots + \mathbf{p}_{N,n}\xi_N|^{1/n} = \alpha$ et $\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{p}_{j,n}|^{1/n} \leq \beta$. Alors la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par ξ_1, ξ_2, ..., ξ_N est plus grande que $1 - \log(\alpha)/\log(\beta)$.*

Pour alléger la présentation, seule la dépendance en n sera désormais explicite. Choisissons $\mathbf{A}_n(X) = n!^{a-2r}(X-rn)_{rn}(X+n+1)_{rn}$ où par définition $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$. L'entier r est tel que $1 \leq r < a/2$, ce qui assure que $\mathbf{P}_{1,n}(1) = 0$; il sera ajusté pour optimiser la minoration de $\delta(a)$, c'est-à-dire pour avoir α et β les plus petits possibles dans le critère de Nesterenko. Le facteur $(X-rn)_{rn}$ annule les rn premiers termes de $\mathbf{S}_n(z)$, ce qui en assure la "petitesse". Le deuxième facteur $(X+n+1)_{rn}$ couplé au premier implique que les polynômes $\mathbf{P}_{\ell,n}(X)$ sont "plus ou moins" réciproques, ce qui permet l'élimination des ζ pairs ou impairs en $z=1$.

Décomposons $\mathbf{R}_n(X)$ en éléments simples (les coefficients rationnels $c_{\ell,j,n}$ seront explicités un peu plus tard) :

$$\mathbf{R}_n(X) = \sum_{\ell=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} \frac{c_{\ell,j,n}}{(X+j)^\ell} , \tag{10}$$

et, pour tout $\ell \in \{1, \dots, a\}$, définissons les polynômes

$$\mathbf{P}_{\ell,n}(X) = \sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} X^j \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{0,n}(X) = -\sum_{\ell=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} c_{\ell,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^\ell} X^{j-k} . \tag{11}$$

On peut admettre la preuve un peu technique de la proposition suivante, dont on déduit facilement les théorèmes 4 et 5.

Proposition 4. *i) Pour tout nombre complexe z tel que $|z| \geq 1$, $z \neq 1$, on a*

$$\mathbf{S}_n(z) = \mathbf{P}_{0,n}(z) + \sum_{\ell=1}^{a} \mathbf{P}_{\ell,n}(z) \mathrm{Li}_\ell(1/z) . \tag{12}$$

De plus, $\mathbf{S}_n(1)$ converge, $\mathbf{P}_{1,n}(1) = 0$ et pour tout $\ell \in \{1, \dots, a\}$,

$$z^n \mathbf{P}_{\ell,n}(1/z) = (-1)^{a(n+1)+\ell} \mathbf{P}_{\ell,n}(z) . \tag{13}$$

ii) Quand n tend vers $+\infty$, la limite de $|\mathbf{S}_n(1)|^{1/n}$ existe et vérifie

$$0 < \lim_{n\to+\infty} |\mathbf{S}_n(1)|^{1/n} \leq 2^{r+1} r^{2r-a} . \tag{14}$$

iii) Pour tout $\ell \in \{0, \dots, a\}$, on a $d_n^a \mathbf{P}_{\ell,n}(1) \in \mathbb{Z}$ et

$$\limsup_{n\to+\infty} |\mathbf{P}_{\ell,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r} (2r+1)^{2r+1} . \tag{15}$$

Démonstration des théorèmes 4 et 5. On suppose a impair et n pair : (13) implique que $\mathbf{P}_{\ell,n}(1) = 0$ pour $\ell \geq 2$ pair. Comme on a aussi $\lim_{z\to1} \mathbf{P}_{1,n}(z)\mathrm{Li}_1(1/z) = 0$, on définit une suite de combinaisons linéaires en 1 et les ζ impairs en prolongeant (12) par continuité en $z = 1$ (on écrit $2n$ pour la condition n pair) :

$$\mathbf{L}_n = d_{2n}^a \mathbf{S}_{2n}(1) = \mathbf{p}_{0,2n} + \mathbf{p}_{3,2n}\zeta(3) + \mathbf{p}_{5,2n}\zeta(5) + \cdots + \mathbf{p}_{a,2n}\zeta(a)$$

avec $\mathbf{p}_{\ell,2n} = d_{2n}^a \mathbf{P}_{\ell,2n}(1) \in \mathbb{Z}$. Il résulte de (14) et (15) que

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} |\mathbf{L}_n|^{1/n} \leq \left(e^a 2^{r+1} r^{2r-a}\right)^2 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} |\mathbf{p}_{\ell,n}|^{1/n} \leq (e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1})^2 = \beta .$$

On choisit alors $r = [a/\log^2(a)]$ de sorte que[6] l'on ait $e^a 2^{r+1} r^{2r-a} = e^{-(1+o(1))a\log(a)}$ et $e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1} = e^{(1+\log(2))a+o(a)}$ quand $a \to +\infty$. Enfin, on applique la proposition 3 avec les nombres $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ définis ci-dessus :

$$\delta(a) \geq 1 - \frac{\log(\alpha)}{\log(\beta)} \geq 1 - \frac{a + (r+1)\log(2) + (2r-a)\log(r)}{a + (a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1)} = \frac{1+o(1)}{1+\log(2)} \log(a) .$$

[6]Rappelons que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to x_0$ signifie que $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$.

Pour démontrer le théorème 5, on choisit a pair : pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{S}_n(1)$ est alors une combinaison linéaire de ζ pairs et on montre comme ci-dessus que les nombres $\zeta(2n)$ engendrent sur $\mathbb{Q}$ un espace vectoriel de dimension infinie, d'où la transcendance de π. En effet, la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par toutes les puissances d'un nombre algébrique α est inférieure au degré de n'importe quel polynôme rationnel annulé par α, donc finie.

Démonstration de la proposition 4. i) En reportant (10) dans $\mathbf{S}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}_n(k) z^{-k}$, on a pour tout z tel que $|z| \geq 1$, $z \neq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_n(z) &= \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(k+j)^{\ell}} = \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} z^j \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k^{\ell}} - \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{-k}}{k^{\ell}} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{a} \mathrm{Li}_{\ell}(1/z) \sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} z^j - \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{\ell,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{j-k}}{k^{\ell}} \ ,\end{aligned}$$

c'est-à-dire (12). Comme $1 \leq r < a/2$, la série $\mathbf{S}_n(1)$ est convergente alors que le terme $\mathbf{P}_{1,n}(z)\mathrm{Li}_1(1/z) = -\mathbf{P}_{1,n}(z)\log(1-1/z)$ est le seul qui peut diverger en $z = 1$: cela implique nécessairement que le polynôme $\mathbf{P}_{1,n}(z)$ s'annule en 1. La propriété (13) découle de la relation $\mathbf{R}_n(-X-n) = (-1)^{a(n+1)}\mathbf{R}_n(X)$ (que l'on déduit de l'identité triviale $(\alpha)_k = (-1)^k(-\alpha-k+1)_k$). En effet, comme

$$\mathbf{R}_n(-X-n) = \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{c_{\ell,j,n}}{(-X+j-n)^{\ell}} = \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{\ell} \frac{c_{\ell,n-j,n}}{(X+j)^{\ell}} \ ,$$

l'unicité de la décomposition en éléments simples implique que $c_{\ell,n-j,n} = (-1)^{a(n+1)+\ell} c_{\ell,j,n}$, ce qui se traduit par (13) pour les polynômes $\mathbf{P}_{\ell,n}(z)$.

ii) On peut montrer que $\mathbf{S}_n(1)$ s'exprime sous une forme intégrale similaire à celle de $\mathbf{J}_n$ au paragraphe précédent : pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbf{S}_n(1) = \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} \int\limits_{[0,1]^{a+1}} \frac{\prod_{j=1}^{a+1} x_j^{rn}(1-x_j)^n \, \mathrm{d}x_j}{(1-x_1\cdots x_{a+1})^{(2r+1)n+2}} \ . \tag{16}$$

L'existence de la limite de $|\mathbf{S}_n(1)|^{1/n}$ en découle : en effet, la formule de Stirling implique que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} \right)^{1/n} = (2r+1)^{2r+1}$ et en notant $\mathbf{I}_n$ l'intégrale (strictement positive) à droite de (16), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{I}_n^{1/n} = \max_{\underline{x}\in[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{a+1} x_j^r(1-x_j)}{(1-x_1\cdots x_{a+1})^{2r+1}} \right) \neq 0 \ .$$

Une estimation de la valeur de ce maximum donne alors (14).

iii) Au vu des expressions (11), il suffit en fait de majorer les coefficients $c_{\ell,j,n}$ apparaissant dans le développement en éléments simples de $\mathbf{R}_n(X)$: pour tout $\ell \in \{1,\dots,a\}$ et tout $j \in \{0,\dots,n\}$, on a

$$c_{\ell,j,n} = \frac{1}{(a-\ell)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{a-\ell}}{\mathrm{d}X^{a-\ell}} \left(\mathbf{R}_n(X)(X+j)^a\right)\big|_{X=-j} .$$

Cette expression est délicate à manipuler mais on dispose heureusement de la formule intégrale de Cauchy (voir [A-LF], p. 362) qui se prête plus facilement à des estimations et donne ici :

$$c_{\ell,j,n} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathbf{R}_n(z)(z+j)^{\ell-1}\mathrm{d}z$$

où γ est, par exemple, le cercle de centre $-j$ et de rayon $1/2$. En majorant convenablement $\mathbf{R}_n(z)$ sur γ, on montre (15). Nous admettons le fait que $d_n^a \mathbf{P}_{\ell,n}(1) \in \mathbb{Z}$, dont la démonstration ne présente pas de difficulté mais n'est pas très éclairante.

6 Les perspectives

Les résultats actuellement connus sur la nature arihmétique des nombres $\zeta(2n+1)$ sont relativement pauvres. En effet, rien n'empêche pour l'instant que $\zeta(3) \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$, que $\zeta(1789) \in \mathbb{Q}$ ou que $\zeta(5)/\zeta(3) \in \mathbb{Q}$, bien que ces assertions soient improbables. On peut donc se demander ce qu'il faut chercher exactement et un élément de réponse a été apporté ces dernières années par l'étude des séries polyzêtas, définies par

$$\zeta(\underline{s}) = \zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}} ,$$

pour des entiers positifs $s_i \geq 1$ et $s_1 \geq 2$. L'entier $s_1 + s_2 + \cdots + s_k$ est le poids de $\zeta(\underline{s})$. Ces séries apparaissent naturellement quand on considère les produits des valeurs de la fonction ζ : on a par exemple $\zeta(n)\zeta(m) = \zeta(n+m) + \zeta(n,m) + \zeta(m,n)$, ce qui permet en quelque sorte de "linéariser" ces produits. Il existe une riche structure algébrique associée aux polyzêtas (voir [Co]). On s'est en particulier intéressé aux $\mathbb{Q}$-sous-espaces vectoriels $\mathcal{Z}_p$ de $\mathbb{R}$, engendrés par les 2^{p-2} polyzêtas de poids $p \geq 2$: $\mathcal{Z}_2 = \mathbb{Q}\zeta(2)$, $\mathcal{Z}_3 = \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(2,1)$, $\mathcal{Z}_4 = \mathbb{Q}\zeta(4) + \mathbb{Q}\zeta(3,1) + \mathbb{Q}\zeta(2,2) + \mathbb{Q}\zeta(2,1,1)$, etc. Posons $v_p = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_p)$. On a alors la

Conjecture 2. *i) (Zagier) Pour tout entier $p \geq 2$, on a $v_p = c_p$, où l'entier c_p est défini par la récurrence de type Fibonacci $c_{p+3} = c_{p+1} + c_p$, avec $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$.*

ii) Les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathcal{Z}_p$, $p \geq 2$, sont en somme directe.

La suite $(v_p)_{p\geq 2}$ devrait donc croître comme α^p (où $\alpha \approx 1,3247$ est racine du polynôme $X^3 - X - 1$), ce qui est bien plus petit que 2^{p-2}. Il y a donc beaucoup de relations linéaires entre les polyzêtas de même poids (et conjecturalement aucune en poids différents) : nous

n'employons pas le conditionnel car un théorème de Terasoma affirme que l'on a $v_p \leq c_p$ pour tout entier $p \geq 2$. Il reste donc à montrer l'inégalité inverse mais aucune minoration non triviale de v_p n'est connue à ce jour : si l'on montre facilement que $v_2 = v_3 = v_4 = 1$, on est bloqué dès l'égalité $v_5 = 2$, qui est équivalente à l'irrationalité toujours inconnue de $\zeta(5)/(\zeta(3)\zeta(2))$. On voit donc que la conjecture 2 est naturellement liée à la conjecture 1 de l'introduction et qu'elle pourrait aider à comprendre la nature arithmétique des valeurs aux entiers impairs de la fonction ζ de Riemann.