Exercice 1.

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que

$$M\,{}^tM\,M = I_n.$$

1. Montrer que M est inversible.
2. Montrer que M est symétrique.
3. Trouver M.
4. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$ {}^tA\,A^2 = I_n.$$

Exercice 2.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \left(\ln(1+x)\right)^n \mathrm{d}x$$

et on étudie ici la suite (I_n).

(1) Justifier l'existence des intégrales définissant les I_n.

(2) Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle converge vers une limite à préciser.

(3) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, pour tout $n \geq 1$.

(4) Conclure que

$$I_n = o\big((\ln 2)^n\big)$$

et donner un équivalent de I_n.

Exercice 3.

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2.
2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$M^n = a_n M + b_n I.$$

Exercice 4.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ t & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. (a) Étudier le rang de $A(t)$ selon les valeurs de $t \in \mathbb{R}$.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs propres de $A(t)$.

(c) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A(t)$ est-elle diagonalisable ?

2. Soit $\lambda > 0$ un réel et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $|T|$ suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose aussi que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T = -k).$$

On note

$$A(T) = \begin{pmatrix} 0 & T & 1 \\ T & 0 & 1 \\ T & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et R le rang de $A(T)$.

(a) Déterminer la loi de R.

(b) Calculer la probabilité que $A(T)$ soit diagonalisable.

Exercice 5.

Soit A et B deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation, d'inconnue x,

$$x^2 + 2Ax + B = 0$$

soient réelles ?

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.

(2) Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ susceptibles d'être des extrema de f.

(3) Soit $t > 0$ fixé. Étudier les extrema de F_t, où F_t est la restriction de f à la droite d'équation

$$y = tx.$$

(4) Quels sont les extrema absolus de f ?